

Algebra und Zahlentheorie.

Kombinatorik:

Linés Escardó, E.: Das Problem der Koinzidenzen. Rev. mat. hisp.-amer., IV. s. 1, 202—214 (1941) [Spanisch].

In einer weitgehenden Verallgemeinerung des Problems des Rencontrespiels wird die folgende Frage studiert: Gegeben seien q Teilmengen M_α einer Menge M von n Elementen; jede Menge M_α bestehe aus p_α gleichen Elementen, $\alpha = 1, 2, \dots, q$; Elemente verschiedener Teilmengen sind aber ungleich; gesucht wird die Anzahl aller Anordnungen dieser n Elemente, welche aus genau s , sonst aber beliebigen Elementen bestehen, wobei aber jedes Element an der betreffenden Stelle auftritt, die ihm in seiner ursprünglichen Ordnung durch α zugewiesen war. Von einer derartigen Anordnung wird gesagt, daß sie s Koinzidenzen habe. Zunächst wird ein Weg angegeben, um alle Anordnungen mit mindestens s Koinzidenzen zu finden. Dabei ergibt sich für die Anzahl A_s dieser Koinzidenzen

$$A_s = \sum \frac{(n-s)!}{(p_1-x_1)!(p_2-x_2)!\dots(p_q-x_q)!} \binom{p_1}{x_1} \binom{p_2}{x_2} \dots \binom{p_q}{x_q}, \quad x_1+x_2+\dots+x_q=s, \quad 0 \leq x_\alpha \leq p_\alpha.$$

Zwischen der Anzahl v_s der Anordnungen mit genau s Koinzidenzen und den Größen A_s besteht aber das Gleichungssystem

$$A_s = \sum_{\beta=0}^{n-s} \binom{s+\beta}{s} v_{s+\beta}, \quad s = 0, 1, \dots, n,$$

das sich in der Gestalt $v_s = \sum_{\beta=0}^{n-s} \binom{s+\beta}{s} (-1)^\beta A_{s+\beta}$ auflösen läßt. Die mit den

Laguerreschen Polynomen eng zusammenhängenden Polynome

$$F_m(x) = \frac{1}{m!} e^{-x} \frac{d^m (x^m e^x)}{dx^m} = \sum_{\alpha=0}^m \frac{x^{m-\alpha}}{(m-\alpha)!} \binom{m}{\alpha}$$

gestatten die Einführung einer Funktion $\varphi(z, t) = z^n \prod_{\alpha=1}^q F_{p_\alpha} \left(\frac{t}{z} \right)$ und die Definition

der Funktion $f(z) = \int_0^\infty \varphi(z, t) e^{-t} dt = \sum_{s=0}^n A_s z^s$, die daher als eine erzeugende Funktion

der $A_s = \frac{f^{(s)}(0)}{s!}$ angesprochen werden kann; für v_s erhält man $v_s = \frac{f^{(s)}(-1)}{s!}$. An-

schließend werden die bereits bekannten Sonderfälle kurz behandelt und auf einen Fehler in H. Laurent, Théorie des jeux de hasard, S. 96, 1893, hingewiesen. F. Knoll.

Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

Wendelin, H.: Ein Determinantenentwicklungssatz und seine Anwendung in der Theorie der Integralgleichungen. Dtsch. Math. 6, 267—271 (1941).

Ist D die $(n+1)$ -reihige Determinante $|x_{ik}|$, $i, k = 0, 1, \dots, n$, so läßt sich D schreiben in der Form

$$D = \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \sum_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}\}} A_{\sigma_1 \dots \sigma_{r-1}}^{\bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_{(n+1)-r}} \sum_{(\varrho_1 \dots \varrho_{r-1}) \sigma} x_{s \varrho_1} x_{\varrho_1 \varrho_2} \dots x_{\varrho_{r-1} s}.$$

Dabei ist s eine feste der Zahlen $0, \dots, n$, \sum bedeutet die Summe über alle Kombinationen $(r-1)$ -ter Ordnung aus den n Zahlen $\{0, 1, \dots, n\} - \{s\}$, $\sum_{(\varrho_1, \dots, \varrho_{r-1}) \sigma}$ be-

deutet die Summe über alle Permutationen $(\varrho_1, \dots, \varrho_{r-1})$ der Zahlen $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, $A_{\sigma_1 \dots \sigma_{(n+1)-r}}^{\sigma_1 \dots \sigma_{(n+1)-r}}$ ist die Unterdeterminante, bestehend aus den Zeilen und Spalten $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{(n+1)-r}\} = \{0, 1, \dots, n\} - \{s, \sigma_1, \dots, \sigma_r\}$. Dieser Entwicklungssatz wird angewendet, um die formale Identität der von Fredholm bzw. Neumann gegebenen Entwicklungen für den lösenden Kern einer linearen inhomogenen Integralgleichung einfach zu beweisen. G. Köthe (Gießen).

Giuga, Giuseppe: Determinanti di successioni generate da equazioni ricorrenti lineari omogenee a coefficienti costanti. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 76, 115—126 (1939).

Verf. geht aus von der linearen homogenen Rückschlußgleichung

$$(1) \quad U_{r+h+1} + a_h U_{r+h} + \dots + a_1 U_{r+1} = 0$$

mit von r unabhängigen $a_r, a_1 \neq 0$. Eine Folge U_r ist eine Lösung von (1), wenn je $h+1$ aufeinanderfolgende Glieder von U_r der Gleichung (1) genügen. Da mit t Lösungen $U_{1r}, U_{2r}, \dots, U_{tr}$ auch die Linearkombinationen mit von r unabhängigen Koeffizienten Lösungen sind, kann man an den aus t aufeinanderfolgenden Gliedern der t Lösungsfolgen gebildeten Determinanten die lineare Abhängigkeit der Lösungen ablesen. Diese und verwandte Determinantenbildungen werden untersucht. Z. B. gilt mit $D(r) = |U_{i,r+k}|$ ($i, k = 1, 2, \dots, t$) stets $D(r+1) = (-1)^h a_1 D(r)$.

E. Schulenberg (Berlin).

Guareschi, Giacinto: Alcune identità tra matrici. Atti Accad. Ligure Sci. Lett., Pavia 1, 233—238 (1941).

Bedeutet \mathfrak{A} eine beliebige rechteckige Matrix mit n Zeilen und m Spalten, u und v n -dimensionale Spaltenvektoren und wird als Zeichen der Transposition der Querstrich verwendet, so gilt die folgende Determinantenidentität

$$(1) \quad \left| \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ u \end{pmatrix} (\mathfrak{A}, u) \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ v \end{pmatrix} (\mathfrak{A}, v) \right| - \left| \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ u \end{pmatrix} (\mathfrak{A}, v) \right|^2 = |\overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}| \cdot \left| \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \\ u \\ v \end{pmatrix} (\mathfrak{A}, u, v) \right|.$$

Setzen wir $\overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}} u = \xi$, $\overline{\mathfrak{A}} v = \eta$, $\overline{u} u = c$, $\overline{v} v = d$, $\overline{u} v = e$, wobei \mathfrak{B} eine symmetrische quadratische Matrix der Ordnung m und ξ und η m -dimensionale Spaltenvektoren sind, so ist die Identität (1) gleichbedeutend mit

$$(2) \quad \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \xi \\ \overline{\xi} & c \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \eta \\ \overline{\eta} & d \end{matrix} \right| - \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \eta \\ \overline{\xi} & e \end{matrix} \right|^2 = |\mathfrak{B}| \cdot \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \xi & \eta \\ \overline{\xi} & c & e \\ \overline{\eta} & e & d \end{matrix} \right|.$$

Setzt man in (2) auf beiden Seiten die Abhängigkeit von c, d und e in Evidenz, so ergibt eine einfache Zwischenrechnung, daß diese Identität bewiesen ist, wenn

$$(3) \quad \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \xi \\ \overline{\xi} & 0 \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \eta \\ \overline{\eta} & 0 \end{matrix} \right| - \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \eta \\ \overline{\xi} & 0 \end{matrix} \right|^2 = |\mathfrak{B}| \cdot \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \xi & \eta \\ \overline{\xi} & 0 & 0 \\ \overline{\eta} & 0 & 0 \end{matrix} \right|$$

gilt. (3) ist aber ein Spezialfall der folgenden Identität, die einleitend bewiesen wird:

$$(4) \quad \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \xi_1 \\ \overline{\xi}_2 & 0 \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \eta_1 \\ \overline{\eta}_2 & 0 \end{matrix} \right| - \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \xi_1 \\ \overline{\eta}_2 & 0 \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \eta_1 \\ \overline{\xi}_2 & 0 \end{matrix} \right| = |\mathfrak{B}| \cdot \left| \begin{matrix} \mathfrak{B} & \xi_1 & \eta_1 \\ \overline{\xi}_2 & 0 & 0 \\ \overline{\eta}_2 & 0 & 0 \end{matrix} \right|.$$

In dieser Identität ist \mathfrak{B} eine quadratische, aber nicht notwendig symmetrische Matrix, so daß (3) aus (4) durch die Spezialisierungen \mathfrak{B} symmetrisch, $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ hervorgeht. Die Richtigkeit von (4) folgt durch Entwicklung der geränderten Determinanten und Verwendung eines Sylvesterschen Satzes. — Verf. schreibt, wenn \mathfrak{A} und \mathfrak{B} Matrizen des gleichen Typus bedeuten, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ für die Determinante $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$.

Rella (Wien).

Calapaj, Giovanni: Sulle matrici permutabili con una circolante di tipo ω data. 2. Boll. Accad. Gioenia Sci. Nat. Catania, III. s. Fasc. 14, 16—25 (1940).

Die n -reihigen zirkulanten Matrizen vom Typ ω , d. h. Matrizen der Bauart

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \omega a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega a_1 & \omega a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix},$$

lassen sich bekanntlich mit $S = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ wegen $S^n = \omega E_n$ in der Form $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i S^i$ schreiben. Während in Teil 1 [Boll. Accad. Gioenia Sci. Nat. Catania, III. s. Fasc. 11 (1939)] bei der Bestimmung der mit A vertauschbaren Matrizen vorausgesetzt wird, daß die komplexen Größen $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \omega$ durch keine Relation verknüpft sind, wird diese Voraussetzung hier fallen gelassen; das bedeutet, daß unter den charakteristischen Wurzeln von A mehrfache Wurzeln und auch die Wurzel Null vorkommen dürfen. Verf. beweist, daß A nicht nilpotent sein kann und daher nach Transformation auf die kanonische Form Diagonalgestalt besitzt. Es können deshalb Ergebnisse von S. Cherubino (dies. Zbl. 16, 99) angewendet werden. Die Betrachtungen werden ausgedehnt auf zirkulante Matrizenmatrizen vom Typ ω , d. h. auf Matrizen der gleichen Bauart, in denen die a_i durch p -reihige Matrizen A_i ersetzt werden. E. Schulenberg.

Cherubino, Salvatore: Segnatura, divisori elementari e forme canoniche di una matrice. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 4, 38—48 (1941).

Zusammenfassende Darstellung didaktischen Charakters der Beziehungen, die die Begriffe „Elementarteiler“ und „Signatur“ einer Matrix miteinander verbinden; entsprechend hat man Beziehungen zwischen den kanonischen Matrixformen von C. Jordan und Verf. (diese letzte ist mit derjenigen gleichbedeutend, die P. Predella in seiner Theorie der Homographien gegeben hat). An verschiedenen Beispielen zeigt Verf. die Vereinfachungen, die in den Beweisen verschiedener Sätze der Theorie der Matrizen erreicht werden können, wenn seine kanonische Form benutzt wird.

E. G. Togliatti (Genova).

Amato, V.: Funzioni di matrici. Esercitazioni Mat., II. s. 13, 174—177 (1941).

Auszug eines Vortrags, gehalten im Mathematischen Seminar von Catania am 29. IV. 1941. 1. Definition von $f(x)$, wenn $f(z)$ eine analytische Funktion und x eine quadratische Matrix der Ordnung n bedeutet (bloße Literaturangaben). 2. Fragen über die mit x und $p(x)$ vertauschbaren Matrizen, wenn p ein Polynom bedeutet. Ankündigung einer demnächst vom Verf. in den Rend. Circ. mat. Palermo erscheinenden Arbeit. Dazu Literaturangaben. 3. Bestimmung eines Polynoms p , so daß bei gegebener Matrix A und gegebener analytischer Funktion $f(z)$ die Matrizen $f(A)$ und $p(A)$ identisch sind.

T. Rella (Wien).

Nikolaev, P. V.: L'anamorphose des polynômes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 774—777 (1940).

Lipka, Stephan: Über die Irreduzibilität von Polynomen. Math. Ann. 118, 235—245 (1941).

Es wird eine Reihe von Irreduzibilitätskriterien für ganzzahlige Polynome hergeleitet, die alle dadurch charakterisiert sind, daß sie Größenbeziehungen zwischen den Koeffizienten benutzen, aus denen sich Schlüsse über die Verteilung der Wurzeln in der komplexen Zahlenebene ziehen lassen. Eine erste Gruppe stützt sich, ebenso wie ein bekanntes Kriterium von Perron (Algebra II, 1933, S. 35), auf ältere Untersuchungen von D. E. Mayer [Nouvelles Ann. Math., III. s. 10, 111—124 (1891)]. Andere Irreduzibilitätsbedingungen gehören in den Gedankenkreis einer früheren Veröffentlichung des Verf. (dies. Zbl. 1, 115) und einer Arbeit von E. L. Petterson (dies. Zbl. 16, 3).

Krull (Bonn).

Obrechhoff, Nikola: Sur les zéros de quelques classes de polynomes. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 34, 1—29 u. franz. Zusammenfassung 30—33 (1938) [Bulgarisch].

Le résultat suivant est démontré: la condition nécessaire et suffisante pour

que la suite μ_n , $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, possède la propriété: pour chaque polynome $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ non-négatif dans l'intervalle $(0, a)$ le polynome $a_0 \mu_0 + a_1 \mu_1 x + \dots + a_n \mu_n x^n$ est aussi non-négatif dans le même intervalle, est que les différences $\Delta^p \mu_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $p = 0, 1, 2, \dots$, soient non-négatifs. Le travail contient aussi quelques généralisations des résultats antérieurs de l'au. (ce Zbl. 16, 147, 386; 18, 99).

Autoreferat.

Markoff, A.: On the determination of the number of roots of an algebraic equation, situated in a given domain. Rec. math. Moscou, N. s. 7, 3—6 (1940).

Verf. betrachtet folgendes Problem: Gegeben $m + 1$ Polynome f, f_1, \dots, f_m mit rationalen Koeffizienten; gesucht die Anzahl q der reellen Nullstellen ξ der Gleichung $f(\xi) = 0$, welche die Ungleichungen $f_j(\xi) > 0$ ($j = 1, \dots, m$) erfüllen. Für $m = 1$ wird die Aufgabe durch einen bekannten Algorithmus von Hermite-Sylvester gelöst. Das allgemeine Problem kann sofort auf den Fall reduziert werden, daß f zu jedem einzelnen f_j prim ist. Sodann sei A ein beliebiges Teilsystem von $(1, \dots, m)$. p_A bedeute die Anzahl der reellen Nullstellen von $f = 0$ mit der Nebenbedingung $\prod_{j \in A} f_j > 0$. Die Bestimmung von p_A ist ein Problem des betrachteten Typs mit $m = 1$.

Verf. gibt nun mit Hilfe aller Anzahlen p_A eine explizite Bestimmung von q .

H. L. Schmid (Berlin).

Sz. Nagy, Gyula v.: Über die reellen Nullstellen gewisser Polynome mit Parametern. Acta Sci. Math. Szeged 10, 36—41 (1941).

Verf. stellt 10 Sätze über die reellen Nullstellen gewisser Polynome auf. Alle auftretenden Polynome $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$, $G(x)$ haben reelle Koeffizienten. Der Beweis der Sätze basiert im wesentlichen auf folgendem, leicht beweisbaren Lemma: f besitze zwei reelle Nullstellen a und b , zwischen denen eine ungerade Anzahl von Nullstellen von g und eine gerade Anzahl von Nullstellen von F liege; dann hat das Polynom $\varphi(x) = gF - fG$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) mindestens eine Nullstelle. — Als Beispiele der daraus sich ergebenden Sätze seien erwähnt: 1. Haben f, g, F, G in x die Grade $m, m - 1, k, k - 1$ ($k < m$) und besitzt f lauter reelle und verschiedene Nullstellen, die von den ebenfalls reellen Nullstellen von g getrennt werden, so hat φ zwischen der kleinsten und größten Nullstelle von f mindestens $m - k - 1$ Nullstellen. 2. Besitzt f m Paare von benachbarten reellen Nullstellen, deren Intervalle eine ungerade Anzahl der reellen Nullstellen von g enthalten und ist F ein definites oder semidefinites Polynom, so besitzt φ mindestens m reelle Nullstellen. *H. L. Schmid.*

Lahaye, Edm.: Sur la représentation des racines des équations algébriques. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 27, 418—427 (1941).

Verf. gibt für die Wurzeln von algebraischen Gleichungen

$$(1) \quad f(y) = y^p + a_1 y^{p-1} + a_2 y^{p-2} + \dots + a_p,$$

die keine mehrfachen Wurzeln besitzen, eine Entwicklung an, die er folgendermaßen erhält: Führt man in der Gleichung (1) zwei neue Parameter t und k ein und betrachtet die Gleichung

$$(2) \quad y^p + a_1 t y^{p-1} + a_2 t^2 y^{p-2} + \dots + a_p t^p + k t^p - k = 0,$$

so kann man in der Umgebung von $t = 0$ für die Wurzeln die Entwicklung

$$y_q = e^{\frac{2q\pi i}{p}} k^{\frac{1}{p}} - \frac{a_1 t}{p} + \dots \quad (q = 1, \dots, p)$$

angeben. Kann man diese Entwicklung bis $t = 1$ fortsetzen, so hat man eine Darstellung der Wurzeln der Gleichung (1). Damit dies möglich ist, muß der Parameter k so gewählt werden, daß die kritischen Punkte von (2) niemals reell sind. Die Bedingung dafür wird vom Verf. angegeben.

Wegner (Heidelberg).

Samuelson, Paul A.: Conditions that the roots of a polynomial be less than unity in absolute value. *Ann. math. Statist.* **12**, 360—364 (1941).

Durch Umformung der Gleichung

$$(1) \quad f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n = 0$$

mittels der linearen Transformation $x = (z + 1) : (z - 1)$, durch welche der Einheitskreis der komplexen z -Ebene auf die linke Halbebene abgebildet wird, geht die Gleichung (1) in die Gleichung

$$(2) \quad \varphi(z) = \sum_{i=0}^n \pi_i z^{n-i} = 0$$

über. Das Problem, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß die Wurzeln der Gleichung (1) dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins sind, ist damit auf das folgende Problem zurückgeführt: Bedingungen anzugeben, daß der Realteil der Wurzeln der Gleichung (2) negativ ist. Dieses Problem ist aber durch Hurwitz vollständig gelöst worden. Wegner (Heidelberg).

Ostrowski, Alexandre: Sur la continuité relative des racines d'équations algébriques. *C. R. Acad. Sci., Paris* **209**, 777—779 (1939).

Verf. gibt die folgenden beiden Sätze ohne Beweis an: 1. Es seien x_ν bzw. y_ν die Wurzeln der beiden Polynome

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{bzw.} \quad g(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n.$$

Setzt man $T = \max_{\nu=1, \dots, n} \left(1, |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}}, |b_\nu|^{\frac{1}{\nu}}\right)$ und $\delta = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$, so gilt, wenn wir die Wurzeln x_ν und y_ν passend durchnummerieren, die folgende Abschätzung:

$$|y_\nu - x_\nu| \leq 4n T \delta^{\frac{1}{n}} \quad \text{für} \quad \nu = 1, \dots, n.$$

2. Es seien wieder x_ν bzw. y_ν die Wurzeln der beiden Polynome $f(z)$ bzw. $g(z)$, und es sei außerdem $a_0 a_n b_0 b_n \neq 0$. Bei der Annahme, daß die Beziehung $b_\nu - a_\nu = \vartheta_\nu a_\nu$ für $\nu = 1, \dots, n$ besteht, wobei $16n |\vartheta_\nu|^{\frac{1}{n}} \leq 1$ ist, gilt die Abschätzung

$$\left|1 - \frac{y_\nu}{x_\nu}\right| \leq 15n |\vartheta_\nu|^{\frac{1}{n}} \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

wenn wir wieder die Wurzeln x_ν und y_ν passend durchnummerieren. Wegner.

Sebastião e Silva, J.: Sur une méthode d'approximation semblable à celle de Gräffe. *Portugaliae Math.* **2**, 271—279 (1941).

Verf. beweist den folgenden Satz: Es sei

$$F(x) = x^n - S_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n S_n$$

ein Polynom mit beliebigen komplexen Koeffizienten, dessen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sämtlich voneinander verschieden sein sollen. Außerdem existiere eine Wurzel α_1 , so daß $|\alpha_1| > |\alpha_i|$ ist für $i = 2, 3, \dots, n$. Die Division von x^p durch $F(x)$ liefert ein Restpolynom $f_p^r(x) \equiv A_0^p x^{n-1} - A_1^p x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} A_{n-1}^p$, wobei p eine beliebige, ganze positive Zahl ist. Dann gilt: Das Polynom $A_0^{-p} f_p^r(x)$ strebt für $p \rightarrow \infty$ gegen ein Polynom $F_1(x)$ mit den Wurzeln $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. Verf. verallgemeinert diesen Satz noch für den Fall, daß mehrere Wurzeln den gleichen absoluten Betrag haben.

Wegner (Heidelberg).

Carlitz, L.: A set of polynomials. *Duke math. J.* **6**, 486—504 (1940).

Wie in früheren Arbeiten [*Duke math. J.* **1**, 137—168 (1935); **3**, 503—517 (1937); **5**, 941—947 (1939)]; dies. *Zbl.* **12**, 49; **17**, 195; **22**, 198] befaßt sich Verf. mit Polynomen über einem Galoisfeld Γ_n von p^n Elementen. Es bezeichne

$$M = M(x) = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_m \quad (c_0 \neq 0)$$

ein Polynom in einer Unbestimmten x mit Koeffizienten aus Γ_n ; $m = \text{Grad } M$. Weiter sei mit einer anderen Unbestimmten t $\psi_m(t) = \prod_{\text{Grad } M < m} (t - M)$, $\psi_0(t) = t$, wo das Produkt

über alle M von einem Grade kleiner als m einschließlich $M = 0$ zu erstrecken ist.

Es gilt (s. die erste d. o. zitierten Arbeiten) $\psi_m(t) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} t^{p^i}$ mit

$$\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} = F_m(F_i L_{m-i}^{-1})^{-1}, \quad \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = F_m L_m^{-1}, \quad \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} = 1$$

und

$$F_m = \prod_{\mu=1}^m [\mu]^{p^n(m-\mu)}, \quad L_m = \prod_{\mu=1}^m [\mu], \quad F_0 = L_0 = 1, \quad [\mu] = x^{p^n \mu} - x.$$

Schließlich sei $k = \alpha_0 + \alpha_1 p^n + \dots + \alpha_s p^{ns}$ ($0 \leq \alpha_i < p^n$) die Entwicklung einer natürlichen Zahl k im System der Grundzahl p^n . Verf. definiert in Verallgemeinerung der Polynome $\psi_m(t)$ die Polynome

$$G_k(t) = \psi_0^{\alpha_0}(t) \psi_1^{\alpha_1}(t) \dots \psi_s^{\alpha_s}(t), \quad G_0(t) = 1, \quad G_{\alpha p^n i}(t) = \psi_i^{\alpha}(t) \quad (0 \leq \alpha < p^n),$$

und setzt sich zum Ziel, verschiedene Eigenschaften der $G_k(t)$ abzuleiten. Zu diesem Zweck betrachtet er neben $G_k(t)$ die Polynome

$$G'_k(t) = \prod_{i=0}^k G'_{\alpha_i p^n i}(t) \text{ mit } G'_{\alpha p^n i}(t) = \psi_i^{\alpha} \text{ für } 0 \leq \alpha < p^{n-1}, \quad G'_{(p^n-1)p^n i} = \psi_i^{p^n-1} - F_i^{p^n-1}.$$

1. Es gilt $G_k(ct) = c^k G_k(t)$, $G'_k(ct) = c^k G'_k(t)$, $c \in \Gamma_n$, und

$$G_k(t+u) = \sum_{x=0}^k \binom{k}{x} G_x(t) G_{k-x}(u), \quad G'_k(t+u) = \sum_{x=0}^k \binom{k}{x} G'_x(t) G'_{k-x}(u).$$

2. Jedes Polynom $f(t)$ in t von einem Grade $\leq k$ hat eindeutige Darstellungen $f(t) = \sum_{x=0}^k A_x G_x(t)$, $f(t) = \sum_{x=0}^k A'_x G'_x(t)$. Für $i < p^{nm}$ bestimmen sich die Koeffizienten A_i , A'_i aus

$$(-1)^m \frac{F_m}{L_m} A_i = \sum_{\text{Grad } M < m} G'_{p^{nm}-1-i}(M) f(M), \quad (-1)^m \frac{F_m}{L_m} A'_i = \sum_{\text{Grad } M < m} G_{p^{nm}-1-i}(M) f(M).$$

3. Für $l < p^{nm}$ und beliebiges k gilt

$$\sum_{\text{Grad } M < m} G'_i(M) G_k(M) = (-1)^m \frac{F_m}{L_m} \quad \text{für } k+l = p^{nm}-1, \quad = 0 \text{ sonst.}$$

Für $k < p^{nm}$, $l < p^{nm}$ gilt

$$\sum_{\text{Grad } M < m} G'_i(M) G_k(M) = (-1)^m \frac{F_m}{L_m} \quad \text{für } k+l = p^{nm}-1, \quad = 0 \text{ sonst.}$$

\sum' bedeutet, daß nur über Polynome mit höchstem Koeffizienten 1 summiert wird. — Der letzte Abschnitt bringt einige arithmetische Anwendungen. *H. L. Schmid.*

Remak, Robert: Ein Satz über die sukzessiven Minima bei definiten quadratischen Formen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 1071—1076 (1941).

Es sei $m_v = f(u_{1v}, u_{2v}, \dots, u_{nv})$ das v -te Minimum einer positiv definiten quadratischen Form $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_k x_l$ mit der Determinante A und $U = |u_{ik}|$, $i, k = 1, \dots, n$. Ist für eine positive Zahl γ_n allgemein für alle definiten quadratischen Formen von n Veränderlichen bewiesen, daß $\gamma_n \leq |A| m_1^{-n}$ ist, dann gilt auch für alle definiten quadratischen Formen von n Veränderlichen

$$\gamma_n \leq \frac{|A|}{m_1 m_2 \dots m_n} \quad \text{und} \quad |U| \leq \frac{1}{\gamma_n}. \quad \text{Hofreiter (Wien).}$$

Gruppentheorie:

Andreoli, Giulio: Sulla teoria delle sostituzioni generalizzate e dei loro gruppi generalizzati. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 10, 115—127 (1940).

Étude des applications d'un ensemble en lui-même, qui se déduisent des sub-

stitutions lorsque plusieurs éléments deviennent égaux. L'Au. montre par des exemples que ces opérations engendrent un demi-groupe dans lequel la règle de simplification n'est pas valable en général. Des demi-groupes isomorphes peuvent être construits à partir d'arrangements ou de substitutions portant sur une infinité d'éléments.

P. Dubreil (Nancy).

Casadio, Giuseppina: Costruzione di gruppi come prodotto di sottogruppi permutabili. Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. 2, 348—360 (1941).

Vorgegeben seien zwei Gruppen A und B ; A bzw. B enthalten einen Normalteiler Γ bzw. Δ , der isomorph einer vorgegebenen Gruppe C ist. Es sei $a(i)$ bzw. $b(h)$ ein bestimmter Repräsentant der Klasse i von A bezüglich Γ bzw. der Klasse h von B bezüglich Δ . Der Klasse i von A bezüglich Γ und ebenso der Klasse h von B bezüglich Δ entspreche eine Substitution $h \rightarrow h_i$ bzw. $i \rightarrow i_h$ der Klassen von B bezüglich Δ bzw. der Klassen von A bezüglich Γ unter sich, und den beiden Klassen i und h sei ein Element $c(i, h)$ von C zugeordnet. Es werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Verbindungsgruppe G der beiden untereinander vertauschbaren Untergruppen \bar{A} und \bar{B} bestimmt, die bzw. zu den Gruppen A und B isomorph sind und sich in einer zu C isomorphen Untergruppe \bar{C} schneiden, die sowohl in \bar{A} als auch in \bar{B} Normalteiler ist, so daß, wenn bei den bezeichneten Isomorphismen die Elemente $\bar{a}(i)$, $\bar{b}(h)$, $\bar{c}(i, h)$ den Elementen $a(i)$, $b(h)$, $c(i, h)$ entsprechen, die Relation gilt: $\bar{a}(i)\bar{b}(h) = \bar{c}(i, h)\bar{b}(h_i)\bar{a}(i_h)$.

Zappa (Roma).

Zappa, Guido: Sui gruppi di Hirsch supersolubili. 1. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 12, 1—11 (1941).

Verf. bezeichnet eine Gruppe \mathfrak{G} als überauflösbare (supersolubile) Gruppe von Hirsch (hier weiterhin kurz s-H-Gr. genannt), wenn \mathfrak{G} wenigstens eine Hauptreihe besitzt, in der die Faktorgruppen sämtlich zyklisch, entweder von Primzahlordnung oder von unendlicher Ordnung sind, und wenn dabei die Anzahl der Faktoren in der Hauptreihe endlich ist. — Er stellt fest: Jede Untergruppe und jede Faktorgruppe einer s-H-Gr. ist eine s-H-Gr. — In jeder Hauptreihe einer s-H-Gr. sind die Faktorgruppen entweder zyklisch von Primzahlordnung oder zyklisch von unendlicher Ordnung. — Die Ableitung einer s-H-Gr. hat eine aufsteigende Zentralreihe. — In einer s-H-Gr. sind in zwei verschiedenen Hauptreihen kleinster Länge die einzelnen Faktorgruppen, abgesehen von der Anordnung, einander gleich.

Grün (Berlin).

Zappa, Guido: Sui gruppi di Hirsch supersolubili. 2. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 12, 62—80 (1941).

Für die Bezeichnungen siehe das vorstehende Referat. Verf. setzt in dieser Arbeit seine Untersuchung der s-H-Gr. fort. Er beweist zunächst, daß auch für Kompositionsreihen, wie für Hauptreihen, gilt: In zwei verschiedenen Kompositionsreihen kleinster Länge einer s-H-Gr. sind, abgesehen von der Anordnung, die einzelnen Faktorgruppen einander gleich. — Als p -Sylowgruppe \mathfrak{P} einer s-H-Gr. \mathfrak{G} bezeichnet Verf. jede Untergruppe $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{G}$ von Primzahlpotenzordnung p^m , die nicht echte Untergruppe einer Gruppe $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{G}$ von Primzahlpotenzordnung ist. Er beweist: \mathfrak{G} werde von a und b mit den Relationen $b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ erzeugt; dann haben alle 2-Sylowgruppen von \mathfrak{G} die Ordnung 2 und zerfallen in zwei Systeme konjugierter Gruppen, deren eines aus allen Untergruppen $\{ba^{2^h}\}$, deren anderes aus allen Untergruppen $\{ba^{2^h+1}\}$ besteht. — Schließlich zeigt Verf. noch: Eine Gruppe \mathfrak{G} von Hirsch ist eine s-H-Gr. dann und nur dann, wenn sich jede von \mathfrak{G} nach 1 führende Kette: $\mathfrak{G}, \mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n = 1$ so verfeinern läßt, daß jede Gruppe in der vorhergehenden entweder den Index p (= Primzahl) oder den Index ∞ hat. Hierbei wird von \mathfrak{S}_{c+1} gesagt „ \mathfrak{S}_{c+1} hat in \mathfrak{S}_c den Index ∞ “, wenn es ein Element $a \in \mathfrak{S}_c$, $a \notin \mathfrak{S}_{c+1}$, a von der Relativordnung ∞ in bezug auf \mathfrak{S}_{c+1} , so gibt, daß $\mathfrak{S}_c = \mathfrak{S}_{c+1} + \mathfrak{S}_{c+1}a + \dots$ ist.

Grün (Berlin).

Zappa, Guido: Sulla risolubilità di taluni gruppi finiti. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 4, 16—25 (1941).

In Verschärfung eines früheren Satzes (s. dies. Zbl. 24, 18) wird gezeigt, daß die Gruppen der Ordnung $g = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ ($p_1 < \dots < p_r$ Primzahlen, $p_1 \geq r + 1$) auflösbar sind, wenn entweder $a_i \leq 3$ ($i = 1, \dots, r - 1$), $a_r < p_r$ oder $a_1 \leq 4$, $a_i \leq 3$ ($i = 2, \dots, r$) gilt. Die Beweise sind ähnlich gebaut wie in der früheren Arbeit und stützen sich auf Sätze von H. Wielandt [J. reine angew. Math. 182, 180—193 (1940); dies. Zbl. 23, 209] und P. Hall [J. London Math. Soc. 3, 98—105 (1928)].

J. J. Burckhardt (Zürich).

Zito, Ciro: Il gruppo totale di matrici e i suoi sottogruppi fondamentali. Atti Accad. Peloritana Messina 41, 9—20 (1939).

Zito, Ciro: Sottospazi invarianti creati, nello spazio ad n dimensioni, da G_s e sua rappresentazione. Atti Accad. Peloritana Messina 41, 21—26 (1939).

I. Eine Substitution S auf n Buchstaben wird durch eine Matrix dargestellt. Der Normalisator G_S von S in der Gruppe $G_{n!}$ aller $n!$ Substitutionen liefert so eine Matrizengruppe G'_S . Die Eigenschaften von G_S , die von M. Cipolla [Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, III. s. 15, 44—54 u. 113—124 (1909)] und V. Amato (dies. Zbl. 10, 393) untersucht worden sind, werden hier als Eigenschaften der Gruppe G'_S ausgedrückt; sie betreffen das Zentrum von G'_S und seine eigentlich invarianten Elemente, den Rang der Gruppe $G'_{n!}$, die charakteristischen Gleichungen der in G'_S invarianten Matrizen usw. — II. In der zweiten Arbeit gibt Verf. eine Darstellung des Normalisators G_S im Raume S_n , die auf der Betrachtung der invarianten Unterräume von G_S begründet ist.

E. G. Togliatti (Genova).

Piccard, Sophie: Sur les bases du groupe symétrique. Mathematica, Timișoara 17, 147—166 (1941).

Es werden Bedingungen aufgestellt für ein Element S , das zusammen mit einem viergliedrigen Zyklus T die symmetrische bzw. die alternierende Gruppe von n Elementen erzeugt.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Brauer, Richard: On the Cartan invariants of groups of finite order. Ann. of Math., II. s. 42, 53—61 (1941).

Sei \mathfrak{G} eine Gruppe der Ordnung g , Γ ihr Gruppenring, J ein Integritätsbereich, K ein derartiger algebraischer Zahlkörper, daß die Koeffizienten der absolut irreduziblen Darstellungen von \mathfrak{G} in K liegen. Ist \mathfrak{p} ein in der Primzahl p aufgehendes Primideal von K , so hängen die Cartaninvarianten $c_{\kappa 1}(\mathfrak{p})$ nur von p ab, ihre Matrix sei $C(p) = (c_{\kappa \lambda})$. Das Hauptziel der Arbeit ist zu zeigen, daß für jeden Primteiler p von g die Determinante $|C|$ eine Potenz α von p ist. Der Beweis stützt sich auf den früher (dies. Zbl. 18, 295; 22, 303) angegebenen Zusammenhang der Matrix der Cartaninvarianten mit der Matrix Φ der Charaktere einer modularen Darstellung von \mathfrak{G} modulo p : $|\Phi|^2 \cdot |C| = \pm n_1 \dots n_k$, wobei n_i der Index der i -ten Klasse ist, in welche \mathfrak{G} bei der Zerlegung in solche Klassen zerfällt, deren Elemente zu p prime Ordnung haben. Somit bleibt zu zeigen, daß $|\Phi|^2 = \pm \frac{n_1 \dots n_k}{p^\alpha}$. Dies gelingt durch Entwicklung von Φ in gewisse Minoren, die durch passende Klassenbildung erhalten werden.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Krull, Wolfgang: Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen. Mit einer Anwendung auf die Galoissche Theorie. J. reine angew. Math. 184, 19—48 (1942).

Alle hier betrachteten, additiv geschriebenen Abelschen Gruppen A haben den Ring der ganzen p -adischen Zahlen zum Multiplikatorenbereich. Eine solche Gruppe heißt zyklisch, wenn von je zwei Elementen stets eines ein ganzes p -adisches Vielfaches des anderen ist. A heißt separabel, wenn eine abzählbare Untergruppenkette $A = A_0, A_1, A_2, \dots$ existiert, derart, daß in A_i/A_{i-1} der U -Satz gilt, der Durchschnitt aller A_i die Nullgruppe ist und jedes Kongruenzensystem $x \equiv \alpha_i(A_i)$ unter der Verträglichkeitsbedingung $\alpha_{i+1} \equiv \alpha_i(A_i)$ lösbar ist. Die Nebenklassen der A_i

bilden dann ein Hausdorffsches Umgebungssystem; A ist also ein topologischer Raum. Im Sinne dieser Topologie kann man abgeschlossene Untergruppen, Limites und unendliche Summen definieren. A heißt direkte Summe $B_1 + B_2 + \dots$, wenn jede Summe $\beta_1 + \beta_2 + \dots$ konvergiert und jedes Element von A eindeutig als eine solche Summe darstellbar ist. Die anders lautende Definition bei Pietrkowski und Pontrjagin ist unzweckmäßig. Der Zusammenhang von direkter Summe und direktem Durchschnitt wird untersucht. Sodann wird der in einer früheren Note (dies. Zbl. 24, 17) schon angekündigte Hauptsatz bewiesen, der besagt, daß eine gewisse Klasse von separablen Gruppen, die „korrekt verknöteten“, sich als direkte Summen von zyklischen Gruppen darstellen lassen. Insbesondere gilt das für die Gruppen ohne Elemente endlicher Ordnung. — Für kompakte separable Gruppen wird mit Hilfe einer wohlgeordneten aufsteigenden Untergruppenreihe ein charakteristisches Zahlensystem definiert, welches die Gruppe bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Der Beweis beruht auf der Dualitätstheorie: es wird nämlich gezeigt, daß die kompakten separablen Gruppen Charakterengruppen von abzählbaren Torsionsgruppen sind. Mit Rücksicht auf die Galoissche Theorie werden einige Sätze über Unter- und Faktorgruppen kompakter separabler Gruppen hergeleitet. Zum Schluß wird bewiesen: Jede kompakte separable abelsche Gruppe ist Galoissche Gruppe eines absolut abelschen Körpers über einem geeigneten Grundkörper. *van der Waerden* (Leipzig).

Weyl, Hermann: On the use of indeterminates in the theory of the orthogonal and symplectic groups. Amer. J. Math. 63, 777—784 (1941).

Zunächst wird ein Fehler im 5. Kapitel des Buches The Classical Groups (dies. Zbl. 20, 206) berichtet. Sodann werden für die Hauptergebnisse des 5. und 6. Kapitels, die von der orthogonalen und der symplektischen Gruppe handeln, neue Beweise gegeben, unter Vermeidung des damals angewandten „unitären Kunstgriffes“. Zu einer allgemeinen infinitesimalen, symplektischen Transformation S , die mit unbestimmtem Koeffizienten s_j in der Gestalt $S = \sum L_j s_j$ angesetzt werden kann, wird eine „allgemeine“ symplektische Transformation

$$A = (E - S)(E + S)^{-1} = (E + S)^{-1}(E - S)$$

gebildet. Durch die Relation

$$(E - S)(E + S)^{-1} = (E - S')(E + S')^{-1} \cdot (E - S'')(E + S'')^{-1}$$

wird zu je zwei S -Matrices S', S'' eine dritte S definiert. Ist f eine symplektische Invariante von Vektoren x, y, \dots , so ist f auch eine infinitesimale symplektische Invariante, d. h. ein gewisser Differentialoperator ergibt, auf f angewandt, Null. Mit Hilfe einer Identität vom Capellischen Typus wird neu bewiesen, daß alle solche Invarianten sich durch die fundamentalen bilinearen Invarianten $[xy]$ ausdrücken lassen. Die Transformationen A induzieren im Tensorraum Transformationen $\pi_f(A)$. Die lineare Hülle dieser Transformationen ist eine Algebra \mathbb{C}_f , von der gezeigt wird, daß sie ein Einselement besitzt und voll reduzibel ist. Letzteres wird durch den Nachweis bewiesen, daß der zu einem invarianten Teilraum orthogonale Raum ebenfalls invariant ist. Hieraus folgt nun, wie in dem zitierten Buch, daß die symplektischen Transformationen eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit bilden, deren allgemeines Element A ist, und es wird eine Basis für das zugehörige Primideal angegeben. Die Untersuchung der orthogonalen Gruppe verläuft ganz analog. *van der Waerden*.

Verbände. Ringe. Körper:

Kamei, Eiiti: Zum Durchschnittssatz in einartigen Ringen. Proc. Imp. Acad. Jap. 17, 95—99 (1941).

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß sich in einem kommutativen Ringe jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellen läßt, und zwar unter Beschränkung auf einartige Ringe und schwache Primärideale. Verf. ist es offenbar entgangen, daß das von ihm unter

speziellen Voraussetzungen behandelte Problem schon früher im allgemeinen Fall vom Ref. erledigt wurde (S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1923, 2. Abhandl., 11—16). Krull.

Nakayama, Tadas: On Frobeniusean algebras. 2. Ann. of Math., II. s. 42, 1—21 (1941).

Im ersten Kapitel werden weitere Untersuchungen über Frobenius-Algebren (F.A.) angestellt. In Teil I (dies. Zbl. 21, 294) war (nach Brauer und Nesbitt, dies. Zbl. 16, 341) gezeigt worden, daß A genau dann Frobeniusalgebra ist, wenn es in A eine Hyperebene H (Gesamtheit aller Elemente $\sum \xi_i a_i$ aus A , wo a_1, a_2, \dots eine Basis von A ist, die ξ_i dem Grundkörper F angehören und $\sum \xi_i \lambda_i = 0$ gilt, $c = \sum \lambda_i a_i \neq 0$ aus A) gibt, die kein Ideal außer 0 enthält, eine sogenannte nichtsinguläre Hyperebene. Zu jeder nichtsingulären Hyperebene von A gibt es einen eindeutig bestimmten Automorphismus $x \rightarrow x^\varphi$ von A mit $x^\varphi y - yx$ in H für alle x, y aus A . φ verbindet die beiden dualen Korrespondenzen zwischen den Rechts- und den Linksidealen von A , die darstellungstheoretische mit der in I betrachteten, die auf gegenseitiger Annullierung beruht; es gilt nämlich: Sind $I \supseteq I_0$ Linksideale von A , so ist der Darstellungsmodul I/I_0 mit $r(I_0)^\varphi/r(I)^\varphi$ äquivalent. Die zu verschiedenen H gehörigen φ unterscheiden sich nur um innere Automorphismen von A , sind die φ selber innere Automorphismen, so ist A symmetrisch und umgekehrt. Die Ergebnisse von I werden weiter verwendet, um Untersuchungen von Deuring (dies. Zbl. 5, 6) über Galoismoduln und Normalbasen auf den Fall zu verallgemeinern, wo die Gruppenalgebra nicht halbeinfach ist. Im zweiten Kapitel werden Frobeniussche und Quasi-Frobeniussche Ringe definiert, die Minimalbedingung für Rechts- und Linksideale wird dabei vorausgesetzt. Die Theorie aus I wird im wesentlichen übertragen. Es werden auch gewisse Erhaltungssätze aufgestellt, wie daß der Gruppenring einer endlichen Gruppe in einer F.A. (Q.F.A.) und daß das direkte Produkt zweier F.A. (Q.F.A.) wieder eine F.A. (Q.F.A.) ist.

Deuring (Jena).

Nakayama, Tadas: Algebras with anti-isomorphic left and right ideal lattices. Proc. Imp. Acad. Jap. 17, 53—56 (1941).

In einer Quasi-Frobeniusalgebra (Q.F.A., vgl. Nakayama, dies. Zbl. 21, 294 und vorsteh. Ref.) A ist der Verband der Rechtsideale zu dem der Linksideale dadurch antiisomorph, daß einem Linksideal ζ das Rechtsideal $r = r(\zeta)$ aller $c \in A$ mit $\zeta c = 0$ zugeordnet wird, es ist dann zugleich $\zeta = l(r)$, d. i. die Gesamtheit aller $c' \in A$ mit $c'r = 0$. In einer Frobeniusalgebra über dem Grundkörper F gilt außerdem noch

$$(*) \quad (\zeta : F) + (r(\zeta) : F) = (A : F), \quad (r : F) + (l(r) : F) = (A : F).$$

Diese Eigenschaften sind umgekehrt auch dafür hinreichend, daß A eine Q.F.A. (F.A.) sei. Es wird nun gezeigt, daß allein die Möglichkeit, den Verband der Rechtsideale von A irgendwie antiisomorph auf den der Linksideale abzubilden, schon genügt, um A als Q.F.A. zu erkennen; gilt dann noch (*), so ist A natürlich eine F.A. Dieser Satz wird gleich, im Anschluß an die zweite der oben genannten Arbeiten, allgemeiner für Ringe ausgesprochen, deren Links- und Rechtsideale der Minimalbedingung genügen. Gruppenalgebren und Grassmann-Cartan-Algebren von äußeren Formen geben Beispiele von F.A., sie sind sogar symmetrisch (für den Begriff der symmetrischen Algebren vgl. die oben genannten beiden Arbeiten). Diese Algebren lassen außerdem einen direkten Isomorphismus zwischen dem Verband der Rechtsideale und dem der Linksideale zu, so daß in ihnen diese Verbände einen Antiautomorphismus haben. Diese Eigenschaft kommt aber nicht allen symmetrischen (und daher von selbst Frobeniusschen) Algebren zu. Die ausführlichen Beweise sind einer weiteren Arbeit vorbehalten.

Deuring (Jena).

Nakayama, Tadas: Normal basis of a quasi-field. Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 532—536 (1940).

N. Jacobson [Ann. of Math., II. s. 41, 1—7 (1940); dies. Zbl. 22, 304] hat gezeigt, wie sich der Hauptsatz der galoisschen Theorie auf Schiefkörper übertragen läßt: Sei P

ein Schiefkörper, $\mathfrak{G} = \{E, S, \dots, T\}$ eine endliche Gruppe der Ordnung n von äußeren Automorphismen, Φ der zu \mathfrak{G} gehörige invariante Teilschiefkörper von P . Dann hat P über Φ den (Rechts- und Links-) Rang n . Die Untergruppen von \mathfrak{G} und die Schiefkörper zwischen P und Φ entsprechen sich gegenseitig eindeutig. Verf. beweist hier, daß P sogar eine Normalbasis über Φ besitzt, d. h. es existiert ein Element b in P , so daß b^E, b^S, \dots, b^T eine linear unabhängige Linksbasis von P über Φ bilden. Der Beweis ist eine Verallgemeinerung des Beweises von M. Deuring [Math. Ann. **107**, 140—144 (1932); dies. Zbl. **5**, 6] für kommutative Normalbasen. Er benutzt außerdem eine nichtkommutative Verschärfung des Hilbert-Speiserschen Satzes für die Elemente der Norm 1: Es sei Z das Zentrum von P und $K = \Phi \cap Z$. Es sei weiter K^* eine endliche Erweiterung von K ; P^* entstehe aus P durch Erweiterung des Grundkörpers K zu K^* . Jedem S aus \mathfrak{G} entspreche eine reguläre Matrix C_S in P^* vom Grade r , so daß $C_S C_T^S = C_{TS}$ für alle S und T gilt. Dann existiert in P^* eine reguläre Matrix A vom Grade r mit der Eigenschaft $C_S = A^{S-1}$ für alle S . Ist C_S insbesondere von der Form $C_S = \begin{pmatrix} D_S & H_S \\ 0 & F_S \end{pmatrix}$, so kann A ebenfalls in der Form $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ gewählt werden. Sind A_1 und A_2 irgendwelche regulären Matrizen, für welche $D_S = A_1^{S-1}$, $F_S = A_2^{S-1}$ gilt, so gibt es dazu stets eine geeignete Matrix A_3 mit $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. H. L. Schmid.

Behrens, Ernst-August: Über die Existenz von Algebren beliebigen Ranges mit quadratischer Normenform. Math. Ann. **118**, 85—93 (1941).

Verf. untersucht die durch Arbeiten von Hecke [Math. Ann. **114**, 1—28, 316 bis 351 (1937); dies. Zbl. **15**, 402; **16**, 355] nahegelegte Vermutung, daß positiv definite quadratische Formen in $n = 2k$ Variablen die Normenformen zu gewissen hyperkomplexen Systemen sind. Bei quadratischen Zahlkörpern und Quaternionen sind die Normen selbst binäre bzw. quaternäre quadratische Formen. Diese Algebren besitzen einen Antiautomorphismus derart, daß das Produkt des allgemeinen Elementes mit seinem Bilde eine mit dem Einselement der Algebra multiplizierte quadratische Form ist. Diese Normenform ist multiplikativ. Für Algebren beliebigen Ranges n mit den Basiselementen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ und den Multiplikationskonstanten c_{ikl} ($i, k, l = 1, \dots, n$) wird die Norm des allgemeinen Elementes $a = \sum_{k=1}^n x_k \varepsilon_k$ als die

Determinante der bei der regulären Darstellung D dem Element a zugeordneten Matrix erklärt: $N_D(a) = \left| \sum_k c_{ikl} x_k \right|$. Verf. beweist nun drei Sätze: 1. Außer für $n = 1, 2$

und 4 gibt es keine Algebra mit einer linearen Abbildung in sich derart, daß das Produkt des allgemeinen Elementes mit seinem Bilde eine mit dem Einselement der Algebra multiplizierte quadratische Form ist. 2. Außer für $n = 1, 2$ und 4 gibt es keine Algebra mit multiplikativer quadratischer Normenform. 3. Außer für $n = 1, 2$ und 4 gibt es keine Algebra vom Range n , deren „Darstellungsnorm“ $N_D(a)$ Potenz einer irgendwie als Normenform definierten quadratischen Form ist. — Satz 2 folgt für $n > 8$ bereits aus dem bekannten Satz von Hurwitz über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen (Göttinger Nachr. **1898**, 309—316). Vgl. dazu auch den Beweis des Hurwitzschen Satzes von Jordan, v. Neumann und Wigner [Ann. of Math., II. s. **35**, 29—64 (1934), S. 51; dies. Zbl. **8**, 421]. H. L. Schmid.

Ritt, J. F.: Complete difference ideals. Amer. J. Math. **63**, 681—690 (1941).

Der hier zugrunde gelegte Begriff des Differenzideals ist schwächer als der von Ritt und Raudenbush (dies. Zbl. **22**, 106): es wird nämlich nur verlangt, daß π ein Ideal im Sinne der Algebra ist und daß aus $a \in \pi$ folgt $a_1 \in \pi$. Bezeichnet $\{\sigma\}$ wie dort das kleinste perfekte Ideal, das das Ideal σ umfaßt, so wird bewiesen

$$\{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r\} = \{\sigma_1 \cap \dots \cap \sigma_r\} = \{\sigma_1\} \cap \dots \cap \{\sigma_r\}.$$

Die Mannigfaltigkeit eines Formensystems wird analog definiert wie in der algebraischen Geometrie unter Zuhilfenahme von beliebigen Erweiterungen des zugrunde liegenden

Differenzkörpers J . Es kann vorkommen, daß zwei Formensysteme Σ_1, Σ_2 jedes eine nicht leere Mannigfaltigkeit haben, aber daß es trotzdem keinen Erweiterungskörper von J gibt, in dem Σ_1 und Σ_2 beide Lösungen besitzen. — Zwei Ideale heißen getrennt (separated) bzw. stark getrennt, wenn das von ihnen erzeugte perfekte Ideal $\{\sigma, \tau\}$ bzw. ihre Summe (σ, τ) die Eins enthält. Es gibt getrennte Ideale, die nicht stark getrennt sind. Es gibt Differenzideale, deren Mannigfaltigkeit nur aus 1 und -1 besteht, und die trotzdem weder als Produkt noch als Durchschnitt von Idealen mit den Mannigfaltigkeiten 1 und -1 darstellbar sind. — Ein Differenzideal σ heißt komplett, wenn es zu jedem a in $\{\sigma\}$ ein transformiertes a_j gibt, von dem eine Potenz in σ liegt. Eine notw. und hinr. Bedingung für Komplettheit wird angegeben. Sodann wird bewiesen: Wenn σ komplett ist und $\{\sigma\}$ sich als Durchschnitt von paarweise streng getrennten perfekten Idealen τ_1, \dots, τ_s darstellen läßt, so läßt σ sich eindeutig als Durchschnitt von s kompletten Idealen $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ mit $\{\sigma_i\} = \tau_i$ darstellen. Diese sind paarweise streng getrennt. Es gibt nicht immer ein kleinstes σ enthaltendes komplettes Ideal. van der Waerden (Leipzig).

Chevalley, Claude: An algebraic proof of a property of Lie groups. Amer. J. Math. 63, 785—793 (1941).

Jedes Element x einer Lie-Algebra \mathfrak{L} erzeugt eine lineare Transformation X in \mathfrak{L} vermöge

$$Xy = [y, x].$$

Zur charakteristischen Wurzel 0 dieser linearen Transformation gehört ein linearer Teilraum \mathfrak{N} von \mathfrak{L} , definiert durch $X'y = 0$. Ist die Dimension von \mathfrak{N} möglichst klein, so heißt x ein reguläres Element und \mathfrak{N} eine Cartan-Algebra. \mathfrak{N} ist dann ein nilpotenter Unterring von \mathfrak{L} . Nun wird bewiesen: Sind \mathfrak{N}_1 und \mathfrak{N}_2 zwei Cartan-Algebren in \mathfrak{L} , so gibt es stets eine Transformation der adjungierten Gruppe, die \mathfrak{N}_1 in \mathfrak{N}_2 überführt. Für halbeinfache L war dieser Satz bekannt. Der hier gegebene Beweis ist rein algebraisch und beruht darauf, daß die adjungierte Gruppe eine Untergruppe enthält, die von nilpotenten infinitesimalen Transformationen erzeugt wird, und die bereits genügt, um N_1 in N_2 zu transformieren. van der Waerden (Leipzig).

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Szász, Paul v.: Über die hyperbolische Trigonometrie. Mat. fiz. Lap. 48, 401—408 u. dtsh. Zusammenfassung 408—409 (1941) [Ungarisch].

Verf. gibt eine neue Anordnung zur Herleitung der trigonometrischen Grundformeln der hyperbolischen Geometrie. Auf den absoluten Sinussatz von Bolyai und auf die Existenz der Lobatschewskijschen einander zugeordneten rechtwinkligen Dreiecke gestützt, werden die sechs Grundformeln abgeleitet, die bei einem rechtwinkligen Dreieck zwischen den Winkeln und den den Seiten entsprechenden Parallelwinkeln bestehen. Aus diesen werden die ihnen entsprechenden vier winkeltrigonometrischen Grundformeln bei allgemeinen Dreiecken abgeleitet. Eine unter diesen gestattet, auf die klassische Formel für den Parallelwinkel als Funktion des Abstandes zu schließen. So ergeben sich endlich die vier Grundformeln zwischen den Winkeln und Seiten eines allgemeinen Dreiecks. G. Hajós (Budapest).

Petkantschin, Bojan: Über die Orientierung der Kugel in der Möbiusschen Geometrie. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 51, 124—147 (1941).

Es wird der Umlaufssinn auf der Kugel aus Inzidenzaxiomen für Punkte und Kreise und Anordnungsaxiomen für das Sich-Trennen von Punktpaaren begründet; als ebenes Anordnungsaxiom wird dabei benutzt: Schneiden sich zwei Kreise k_1 und k_2 in S und T und schneidet ein dritter Kreis k den Kreis k_1 in zwei Punkten, die S und T trennen, so gilt dasselbe für k_2 . Sind A, B, P drei Punkte auf einem Kreis k , so heißt die Gesamtheit der Punkte Q , für die PQ durch AB getrennt wird, ein Bogen AB .

Für die gerichteten Bogen auf k , d. h. die Bogen mit geordnetem Endpunktepaar, wird mit Hilfe einer Definition, die Prüfer in seiner Projektiven Geometrie (Leipzig 1935; dies. Zbl. 12, 412) verwendet hat, Gleichsinnigkeit definiert. Jede der beiden Klassen gleichsinniger Bogen auf k heißt ein Richtungssinn auf k . Nach einem Paragraphen über die Vergleichung der Richtungssinne auf sich berührenden und punktfremden Kreisen werden die orientierten Halbkugeln betrachtet. Ist k ein Kreis, Q nicht auf k , so bilden die Punkte, die mit Q nicht auf der gleichen Seite von k liegen, eine Halbkugel; eine orientierte Halbkugel ist eine Halbkugel, auf deren Randkreis ein Richtungssinn gegeben ist. Sind zwei orientierte Halbkugeln H_1 und H_2 gegeben, deren Randkreise k_1 und k_2 sich in S und T schneiden, so betrachte man die entsprechend dem auf k_1 und k_2 gegebenen Richtungssinn gerichteten Bogen ST auf den beiden Kreisen. Liegt der erste in H_2 und der zweite in H_1 oder der erste nicht in H_2 und der zweite nicht in H_1 , so heißen H_1 und H_2 in Minuslage, anderenfalls in Pluslage. Zwei orientierte Halbkugeln heißen gleichsinnig, wenn eine orientierte Hilfsalbkugel, deren Randkreis die Randkreise der gegebenen schneidet, mit beiden in Minus- oder mit beiden in Pluslage ist. Es wird bewiesen, daß die Gleichsinnigkeit unabhängig von der Hilfsalbkugel ist und die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation besitzt. Es gibt zwei Klassen gleichsinniger orientierter Halbkugeln, jede Klasse wird Indikatrix auf der Kugel genannt.

Bachmann (Marburg a. d. L.).

Petkantschin, B.: Axiomatischer Aufbau der zweidimensionalen Möbiusschen Geometrie. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 36, 219—323 u. dtsh. Zusammenfassung 324—325 (1940) [Bulgarisch].

„Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, die zweidimensionale Möbiussche Geometrie bis zu dem Punkte selbständig axiomatisch zu entwickeln, an dem als Koordinaten die gewöhnlichen komplexen Zahlen eingeführt werden können.“ Der erste Teil scheint inhaltlich mit der vorstehend besprochenen Arbeit des Verf. übereinzustimmen. Zu den Inzidenz- und Anordnungsaxiomen des ersten Teils werden im zweiten Teil sechs Axiome über die M -Abbildungen (Möbiussche Abbildungen, Kreisverwandtschaften) hinzugenommen; aus der Zusammenfassung ist nur zu entnehmen, daß unter ihnen ein Stetigkeitsaxiom auftritt. Auf Grund dieser Axiome werden nach dem Vorbild der Methoden, die v. Staudt in der projektiven Geometrie auf der Geraden angewendet hat, für die Punkte Rechenoperationen erklärt, die zu einem Körper führen; „speziellere Eigenschaften der M -Abbildungen, denen Anordnungstatsachen zugrunde liegen, liefern den Beweis, daß dieser Körper zu dem Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen isomorph ist“ (nach der Zusammenfassung referiert). *Bachmann*.

Elementargeometrie:

Weiss, Ernst-August: Konstruktionen mit hängenden Linealen. Forsch. u. Fortschr. 17, 344—345 (1941).

Kurzer Bericht über die unter dem gleichen Titel erschienene Arbeit des Verf. [Deutsche Math. 6, 3—15 (1941); dies. Zbl. 25, 352], ergänzt durch einige historische Bemerkungen.

H. Thomas (Darmstadt).

Lense, J.: Bemerkung zu meinem Aufsatz „Die sphärische Trigonometrie in der sphärischen Astronomie“. Astron. Nachr. 272, 77 (1941).

Vgl. dies. Zbl. 24, 272. Hinweis, daß sich einige der benutzten Gedankengänge bereits bei E. Anding, Ein didaktisches Hilfsmittel zur sphärischen Astronomie [Astron. Nachr. 209, 289 (1919)], finden.

U. Graf (Danzig).

Loria, Gino: Des cerceles ex-circonerits par rapport à un triangle sphérique. Mathematica, Cluj 16, 57—60 (1940).

Für ein sphärisches Dreieck $A_1 A_2 A_3$ werden der Inkreisradius r_0 und die Ankreisradien r_1, r_2, r_3 bekanntlich durch die Formel

$$\operatorname{tg} r_i = \frac{\sqrt{\sin s_0 \sin s_1 \sin s_2 \sin s_3}}{\sin s_i}; \quad 2s_0 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_k = s_0 - a_k$$

ausgedrückt, wo a_1, a_2, a_3 die Dreiecksseiten bedeuten. Verf. leitet analoge Formeln her für den Umkreisradius R_0 des Urdreiecks und für die Umkreisradien R_1, R_2, R_3 der Nebendreiecke $A_1^* A_2 A_3, A_1 A_2^* A_3, A_1 A_2 A_3^*$ (A_k^* ist der diametrale Gegenpunkt von A_k):

$$\text{ctg } R_i = \frac{\sqrt{\cos S_0 \cos S_1 \cos S_2 \cos S_3}}{\cos S_i}; \quad 2S_0 = A_1 + A_2 + A_3, \quad S_k = S_0 - S_k,$$

wo A_1, A_2, A_3 die Dreieckswinkel bedeuten.

E. Egerváry.

Bouvaist, R.: Sur une question proposée non résolue de l'intermédiaire des mathématiciens. *Mathesis* 54, 263—265 (1940).

Die von E. A. Majol 1915 gestellte Aufgabe lautet: Ist F ein Brennpunkt eines dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kegelschnitts, so schneiden sich die Feuerbachschen Kreise der vier Dreiecke FBC, FCA, FAB, ABC in einem Punkt des Hauptkreises des Kegelschnitts. Die Mittelpunkte dieser vier Kreise einerseits und der Umkreise der vier Dreiecke andererseits bilden zwei invers ähnliche Vierecke. Können das Zentrum, die Achsen und das Verhältnis der Ähnlichkeit auf einfache Weise mittels der gegebenen Elemente bestimmt werden? Die vom Verf. gegebene Lösung besagt: Der Schnittpunkt der vier Feuerbachschen Kreise ist der Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel $ABCF$. Durch diesen Punkt geht der Fußpunktkreis jedes der vier Punkte bezüglich des Dreiecks der drei anderen. Der Fußpunktkreis von F ist der Hauptkreis des Kegelschnitts. Ist F' der diametrale Spiegelpunkt von F auf der Hyperbel, so sind die Ähnlichkeitsachsen den Halbierenden der Winkel FAF', FBF', FCF' und damit den Asymptoten der Hyperbel parallel. Das Ähnlichkeitsverhältnis ist gleich dem Verhältnis der Sinus der Winkel von AF und AF' mit der von A ausgehenden Höhe des Dreiecks ABC . Verf. fügt hinzu, daß man die angegebenen Beziehungen auch als Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel bezüglich eines ihr einbeschriebenen Dreiecks und eines Paares ihrer diametralen Gegenpunkte aussprechen könne.

Max Zacharias (Berlin).

Blanchard, René: Sur le tétraèdre orthocentrique. *Mathesis* 54, 290—292 (1940).

Elementargeometrischer Beweis des folgenden Satzes: Wenn die Umkugel eines orthozentrischen Tetraeders $A_i A_k A_l A_m$ von der Höhenlinie h_i berührt wird, dann und nur dann liegt der Mittelpunkt der zweiten (die Höhen- und Schwerpunkte der Seitenflächen enthaltenden) Feuerbachschen Kugel auf der Ebene $A_k A_l A_m$.

E. Egerváry (Budapest).

Federhofer, K.: Einfache Bestimmung des Viereckschwerpunktes. *Z. angew. Math. Mech.* 21, 253—254 (1941).

Es seien M der Diagonalschnittpunkt des Vierecks $ABCD$, H_1 und H_2 die Mitten der Diagonalen. Werden C' und D' so bestimmt, daß $\overline{AC'} = \overline{MC}$ auf der einen und $\overline{BD'} = \overline{MD}$ auf der andern Diagonalen wird, so schneiden sich die Geraden $[H_1 D']$ und $[H_2 C']$ im Schwerpunkt.

Fritz Hohenberg (Wien).

Bratu, Georges: Sur les polygones inscriptibles demi-semblables. *Mathematica, Cluj* 16, 6—12 (1940).

Verf. nennt zwei Vielecke mit derselben Seitenanzahl „halbähnlich“, wenn ihre entsprechenden Seiten parallel sind, und beweist u. a. die Sätze: In einen Kreis lassen sich unendlich viele verschiedene halbähnliche $2n$ -Ecke einschreiben, deren entsprechende Diagonalen ersten Ranges (eine Diagonale ersten Ranges verbindet die Endpunkte von zwei Nachbarseiten) dieselbe Länge haben. — Wird in einem (konvexen) Sehnenviereck eine Seite parallel zu sich selbst verschoben, so ist das Verhältnis der beiden Diagonalen der so entstehenden Sehnenvierecke konstant.

E. Egerváry.

Christov, Ch. Ja.: Über die Teilung des Raumes in Gebiete durch Ebenen. *Spisanie fiz.-mat. družestvo* 26, 315—324 (1941) [Bulgarisch].

Verf. untersucht die Teilung eines dreidimensionalen projektiven bzw. euklidischen Raumes durch Ebenen in allgemeiner Lage. Es werden die notwendigen und hin-

reichenden Bedingungen für eine Konfiguration von n Ebenen aufgestellt (zunächst im projektiven Falle), bei welcher die Höchstanzahl ($= n$) von n -flächigen, durch die Ebenen begrenzten Gebieten erreicht wird. Die Existenz dieser Konfiguration wird bewiesen, und danach werden die Anzahlen derjenigen Gebiete bestimmt, welche gleichflächig sind. Die Ergebnisse wendet Verf. an, um die behandelte Frage auch im euklidischen Raume zu beantworten.

Pekantschin (Sofia).

Jessen, Børge: Eine Bemerkung über das Volumen von Polyedern. Mat. Tidsskr. B 1941, 59—65 [Dänisch].

In der Lehre vom Rauminhalt der Polyeder muß man bekanntlich die Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit von Polyedern unterscheiden. Max Dehns Untersuchungen haben gezeigt, daß zwei Polyeder nicht immer zerlegungs- oder ergänzungsgleich sind [Göttinger Nachr. 1900, 345—354; Math. Ann. 55, 465—478 (1901)]. So ist insbesondere das regelmäßige Tetraeder nicht ergänzungsgleich einem rechtwinkligen Parallelepipet. Die genannten Untersuchungen lehren: Macht man die Voraussetzungen, daß (1) das Volumen eines Polyeders eine reelle Zahl ist, daß (2) kongruente Polyeder dasselbe Volumen haben, daß (3) das Volumen eines aus mehreren Polyedern zusammengesetzten Polyeders gleich der Summe von deren Volumen ist, daß endlich (4) das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Kantenlängen 1, 1, a gleich a ist, so kann man beweisen, daß das Volumen eines Prismas das gewöhnliche ist, und daß zwei symmetrische Polyeder dasselbe Volumen haben. Dehns Resultat lehrt dann weiter, daß es Polyeder gibt, für die es nicht möglich ist, auf der Grundlage der angeführten Voraussetzungen das Volumen zu bestimmen oder zu zeigen, daß sie mit einem Prisma ergänzungsgleich sind. — Verf. beweist allgemeiner: Macht man dieselben Voraussetzungen (1), (2), (3) wie oben, und statt (4) die Voraussetzung (4'), daß das Volumen eines Prismas das gewöhnliche sei, so muß jedes Polyeder, dessen Volumen man auf Grund dieser Voraussetzungen allein finden kann, einem Prisma ergänzungsgleich sein; kann man aus diesen Voraussetzungen allein beweisen, daß zwei Polyeder dasselbe Volumen haben, so müssen diese Polyeder ergänzungsgleich sein. — Damit erlangen Dehns Ergebnisse eine weitergehende prinzipielle Bedeutung, indem sie nicht nur lehren, daß man Polyeder angeben kann, für die eine Volumenbestimmung aus den genannten Voraussetzungen mittels eines bestimmten Verfahrens nicht möglich ist, sondern daß man Polyeder finden kann, für die eine Volumenbestimmung aus diesen Voraussetzungen überhaupt nicht möglich ist. — Zum Beweis seines Satzes definiert Verf. ein Polyeder allgemein als ein Aggregat positiv oder negativ gerechneter gewöhnlicher Polyeder. Er teilt die Polyeder in Klassen ein, indem er zwei Polyeder dann und nur dann zu einer Klasse rechnet, wenn sie ergänzungsgleich sind. Diese Polyederklassen bilden eine abelsche Gruppe \mathcal{G} , in der diejenigen Systeme von Klassen, die ein Prisma enthalten, eine Untergruppe \mathcal{H} bilden. Er führt dann auf Grund der Voraussetzungen seines Satzes eine „Volumenfunktion“ $f(P)$ ein, die für Prismen mit dem gewöhnlichen Volumen übereinstimmt, und von der er nachweist, daß für zwei nicht ergänzungsgleiche Polyeder P und Q stets $f(P) \neq f(Q)$ ist. *Max Zacharias.*

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● **Marletta, Giuseppe: Geometria analitica.** Catania: 1939. 193 pag. e 8 fig. L. 50.—.

● **Boggio, Tommaso, e Cataldo Agostinelli: Lezioni di geometria analitica proiettiva e descrittiva. Con molti esercizi.** Torino: F. Gili 1939. 504 pag. L. 50.—.

● **Campedelli, Luigi, e Vittorio Notari: Esercitazioni di geometria analitica e proiettiva.** 2. ediz. Padova: Casa edit. A. Milani 1939. VII, 392 pag. e 8 fig. L. 50.—.

● **Cherubino, Salvatore: Lezioni di geometria analitica con elementi di proiettiva.** Vol. 1. Coordinate nel piano e nello spazio. Elementi di calcolo di matrici. Roma: Albrighi, Segati & Co. 1940. XV, 475 pag. e 8 fig. L. 35.—.

● Brusotti, Luigi: Teoria analitica delle coniche. Lezioni raccolte dal dott. Pedrazzini Piero. Anno accademico 1939—1940. (R. Università di Pavia, gruppo universitario fascista, „Manlio Sonvico“) Pavia: 1940. 161 pag. e 8 fig.

Weiss, E. A.: Dreiecke in isogonaler Lage. Dtsch. Math. 6, 135—147 (1941).

La transformation quadratique birationnelle dite isogonale, relative à un triangle $a_1a_2a_3$, remplace un point M du plan de ce triangle par le point M' commun aux rayons respectivement symétriques de chaque rayon a_iM relativement à la bissectrice de l'angle a_i correspondant; elle réalise entre le cercle Γ circonscrit au triangle (a) et la droite Δ de l'infini une correspondance ponctuelle projective échangeant les points cycliques; en effet soient $a_i \equiv (R \cos 2\alpha_i, R \sin 2\alpha_i)$, $d \equiv (R \cos 2\varphi, R \sin 2\varphi)$, où les α_i et φ sont déterminés à π près; la parallèle menée de d à a_ja_k coupe Γ en d_i , d'argument φ_i tel que $\varphi + \varphi_i = \alpha_j + \alpha_k$; le point d' , homologue de d , est sur a_id_i ; or l'angle (Ox, a_id_i) est $\alpha_i + \varphi_i - \frac{\pi}{2} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \varphi - \frac{\pi}{2}$. Cette démonstration, beaucoup plus simple que celle de l'au., prouve que les rayons a_id_i sont parallèles, donc que d' est un point de Δ et que cette correspondance (Γ, Δ) est projective et ne dépend que de la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Deux triangles (a) , (b) , inscrits dans Γ , tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ sont dits en position isogonale et donnent la même correspondance (Γ, Δ) . Un cas spécial est celui où b_i est le point où la parallèle à a_ja_k issue de a_i coupe Γ ; dans ce cas, b_ib_k est perpendiculaire au rayon Oa_i et a_ja_k à la bissectrice intérieure de l'angle b_i , de sorte que les triangles (a) , (b) sont orthologiques et que Γ est le cercle de Feuerbach du triangle formé par les droites a_ib_i . Pour deux triangles (a) , (b) , en position isogonale du cas général, la droite de Simson de a_i (ou b_i) relative au triangle (b) , (ou a) est perpendiculaire à a_ja_k (ou b_jb_k), et les 6 droites de Simson concourent au milieu du segment réunissant les orthocentres de (a) , (b) . — L'au. rattache ensuite ces propriétés à la théorie des formes binaires cubiques, car, en posant $\operatorname{tg} \alpha = \xi_2 : \xi_1$, les 3 sommets de (a) sont définis par une équation cubique; je vais exposer les résultats en langage géométrique strictement équivalent. Ω étant un point extérieur au plan de Γ , le cône de sommet Ω et directrice Γ est coupé par une quadrique ayant en commun avec lui une génératrice, de façon à obtenir une cubique gauche C dont Γ est la perspective à partir de Ω . Si D est une droite quelconque, non sécante à C , un plan variable pivotant autour de D , coupe C en 3 points A_1, A_2, A_3 et les droites A_jA_k engendrent une de ces surfaces réglées Σ , de degré 4, ayant C pour ligne double, que Clebsch a signalées; le contour apparent en projection, à partir de Ω , de Σ sur le plan de Γ est une conique P admettant, avec Γ , ∞^1 triangles $a_1a_2a_3$ inscrits dans Γ , circonscrits à P . A un point M de l'espace correspondent ∞^2 droites issues de M , ∞^2 coniques P , ∞^2 triangles $a_1a_2a_3$; on remarque que si la droite D rencontre une sécante double fixe IJ de C , (ou si, ce qui revient au même, M décrit la droite IJ), on obtient ∞^3 droites D , ∞^3 coniques P et ces coniques P sont toutes tangentes à la perspective ij de IJ sur le plan de Γ , de sorte que les nouvelles tangentes à une conique P (autres que ij) menées de i et j se recoupent en un point f situé sur Γ ; en appliquant ce résultat au cas où i, j sont les points cycliques du plan de Γ , les coniques P sont donc des paraboles ayant leur foyer f sur Γ ; si M reste fixe sur IJ , on trouve ∞^2 paraboles P , ∞^2 triangles $a_1a_2a_3$ tous en situation isogonale mutuelle; un seul triangle $a_1a_2a_3$ donné, inscrit dans Γ , donne ∞^1 paraboles qui lui sont inscrites et chacune d'elles admet, avec Γ , ∞^1 triangles de même définition que $a_1a_2a_3$, tous en position isogonale avec le triangle initial. Pour une même parabole P , ayant son foyer f sur Γ , chaque triangle $a_1a_2a_3$ inscrit dans Γ , circonscrit à P est tel que a_2a_3 soit la polaire de a_1 par rapport à une conique H fixe (si P est fixe et a_1 variable sur Γ): le triangle fij prouve que H est une hyperbole équilatère de centre f ; or le correspondant de a_1 sur Δ est le point à l'infini de a_2a_3 , de sorte que a_1 variant sur Γ , on a, pour une même transformation isogonale, à prendre la direction symétrique de fa_1 par rapport à une direction fixe et ceci donne l'expli-

cation géométrique de la formule donnée plus haut pour obtenir d' quand d est donné. — Le réf. avait rencontré ces propriétés à l'occasion de la déformation des surfaces tétraédrales autour d'une asymptotique restant rigide [J. Math. pures appl., IX. s. 5, 227 à 295 (1926)].

B. Gambier (Paris).

Deaux, R.: Conique circonscrite à un triangle réel. *Mathesis* 54, 237—242 (1940).

Untersuchung der 4 Bereiche, in die ein Dreieck die Punkte und dual die Geraden seiner Ebene zerlegt. Anwendung: ABC sei das gemeinsame Poldreieck der Kegelschnitte k_1 und k_2 , Q und Q' seien zwei bez. k_1 und k_2 konjugierte Punkte, P_1 und P_2 die Pole von $[QQ']$. Von der Lage von Q und Q' , P_1 und P_2 auf dem Kegelschnitt $[ABCQQ']$ hängt dann die Realität der gemeinsamen Punkte und Tangenten von k_1 und k_2 ab.

Fritz Hohenberg (Wien).

Danilov, G. G.: Eine Verallgemeinerung des Begriffes der Potenz eines Punktes. *Spisanie fiz.-mat. družestvo* 26, 307—315 (1941) [Bulgarisch].

Verf. geht von der Scheitelgleichung $f(x, y) = 0$, $f(x, y) \equiv y^2 + (1 - c^2)x^2 - 2px$ eines Kegelschnitts k aus und findet die folgende geometrische Deutung der Potenz $f(x_0, y_0)$ bez. k eines Punktes $M(x_0, y_0)$ in der Ebene der Kurve. Man ziehe irgendeine k in den Punkten M_1, M_2 schneidende Gerade g durch M , und es sei t eine zu g parallele Tangente von k mit dem Berührungspunkt P ; falls $d_1 = MM_1$, $d_2 = MM_2$ (mit den entsprechenden Vorzeichen) und μ den Winkel zwischen t und den Brennstrahlen von M bedeuten, hat man $f(x_0, y_0) = d_1 d_2 \sin^2 \mu$. Es werden daraus weitere Deutungen der Potenz abgeleitet und der Potenzbegriff auf Rotationsflächen 2. Ordnung erweitert.

Petkantschin (Sofia).

Zito, Ciro: Sulle coniche tangenti ad una conica. *Atti Accad. Peloritana Messina* 41, 48—51 (1939).

Einige elementare Sätze über zwei tangentielle Kegelschnitte, die in zwei verschiedenen Ebenen liegen, werden synthetisch bewiesen.

U. Morin (Padova).

Grasso, Pietro: Sulle coppie di coniche, non complanari, aventi due punti comuni. *Atti Accad. Peloritana Messina* 42, 151—160 (1940).

Verf. bespricht einige Sätze über die Zentralprojektion eines Kegelschnittes auf die Ebene eines anderen Kegelschnittes, der mit dem ersteren zwei Punkte gemeinsam hat, wobei einer dieser Kegelschnitte als Kreis angenommen wird.

E. Kruppa (Wien).

● **Aprile, Giorgio:** Sui complessi di coniche d'ordine uno dell' S_4 . Roma: 1939. 20 pag.

Hohenberg, Fritz: Über die Hyperflächen zweiten Grades mit einem gemeinsamen Polsimplex. *S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa* 150, 89—108 (1941).

Verf. bezeichnet als „Bund“ das in sich duale System aller Hyperflächen 2. Grades eines projektiven Raumes beliebiger Dimension, die ein Polsimplex gemein haben.

Mittels der Abbildung dieser Hyperflächen $\sum_i \frac{x_i^2}{\alpha_i} = 0$ auf die Punkte (α_i) eines pro-

jektiven Raumes wird das Verhalten des Bundes gegenüber Kollineationen und Korrelationen untersucht, die den Bund in sich überführen. Diesen entsprechen im Bildraum Kollineationen und andere algebraische Transformationen. Es werden ihre Gesamtgruppe und wichtige Untergruppen untersucht und die Invarianten eines Paares von Hyperflächen des Bundes gegenüber jeder dieser Gruppen aufgestellt. Umgekehrt wird die Berechnung eines solchen Hyperflächenpaares, abgesehen von Transformationen der betreffenden Gruppe, aus seinen Invarianten durchgeführt. [Vgl. die frühere Arbeit des Verf.: *Mh. Math. Phys.* 50, 111—124 (1941); dies. Zbl. 25, 354.]

E. Kruppa.

Manara, Carlo Felice: Ricerca grafica della retta dei flessi di una cubica piana nodata. *Boll. Un. Mat. ital., II. s.* 3, 320—325 (1941).

$f = 0$ sei die Gleichung einer rationalen ebenen Kurve 3. Ordnung C^3 ; das durch die C^3 und ihre Hessesche Kurve $h = 0$ bestimmte Kurvenbüschel $f + \lambda h = 0$ enthält eine einzige Kubik, die in ein Dreieck ausartet; dieses besteht aus den beiden Tan-

genten des Doppelpunktes und der Verbindungsgeraden p der Wendepunkte der C^3 . Daher läßt sich p bei vorgegebener C^3 rational bestimmen, und es folgt, daß, wenn die C^3 graphisch irgendwie vorgegeben ist, die Konstruktion der Geraden p durch bloße Anwendung des Lineals möglich sein muß. Verf. fragt nach der tatsächlichen Durchführung dieser Konstruktion. Zu diesem Zwecke stellt er folgende Tatsachen heraus: 1) p ist die einzige Gerade, die gegenüber der Gruppe G_6 der ebenen Projektivitäten, die C^3 in sich selbst abbilden, invariant ist; 2) auf der C^3 bilden die Paare der zu dem gleichen Tangential gehörenden Punkte, d. h. die Berührungspunkte der von einem Punkte der C^3 an diese gezogenen Tangenten, eine Linearschar g_2^1 , die bezüglich der Gruppe G_6 invariant ist; 3) die Verbindungsgeraden der einzelnen Punktepaare der g_2^1 hüllen einen Kegelschnitt k ein, der ebenfalls durch G_6 in sich selbst übergeführt wird; 4) die Tangenten im Doppelpunkte der C^3 , die zusammen bezüglich G_6 invariant sind, gehören der oben genannten Kurve 2. Klasse an, und daher ist die Verbindungsgerade ihrer Berührungspunkte H und K mit k bezüglich G_6 invariant, d. h. fällt mit p zusammen. — Auf Grund dieser Bemerkungen führen die bekannten Verfahren der darstellenden Geometrie (Methode der Zentralprojektion) zur Konstruktion der C^3 , die man dann als Projektion einer Raumkurve 3. Ordnung auffaßt, ohne Schwierigkeit zur Bestimmung der Punkte H und K , d. h. der gesuchten Verbindungsgeraden p der Wendepunkte, womit die gestellte Frage gelöst ist. *L. Campedelli* (Firenze).

Clacys, A.: Sur la courbe cappa. Mathesis 54, 230—236 (1940).

Verf. gibt eine reizvolle Zusammenstellung der Erzeugungsweisen der sog. Kappa-kurve und eine Reihe von Bemerkungen und Zusätzen zu den über diese Kurve erschienenen Noten (vgl. z. B. H. Lorent, dies. Zbl. 24, 166), insbesondere zu ihrer räumlichen Konstruktion durch J. De La Gournerie, *Traité de Géométrie descriptive*, 2^e éd., tome III, p. 150, n° 1002, 1885, Fig. 397; Planche XXII. Er schließt mit einer eleganten, zuerst von Goormaghtigh gefundenen Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes. *K. Fladt* (Tübingen).

Tabakoff, D.: Sur deux nouvelles générations des cycloïdes de Dupin. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 34, 407—419 u. franz. Zusammenfassung 420 (1938) [Bulgarisch].

Une cyclique du quatrième ordre peut, en général, être considérée de huit manières différentes comme lieu des points de contact des deux faisceaux de cercles; les diverses positions des faisceaux s'échangent en appliquant les inversions par rapport aux quatre cercles principaux qui sont deux à deux orthogonaux. Une cycloïde du quatrième ordre peut, en général, être considérée d'une infinité de manières différentes comme lieu des points de contact d'un faisceau de sphères ($S \equiv S_1 + \lambda S_2 = 0$) et le réseau de sphères ($\Gamma \equiv \Gamma_1 + \mu \Gamma_2 + \nu \Gamma_3 = 0$). Dans certains cas particuliers le faisceau (S) et le réseau (Γ) engendrent une cycloïde de Dupin qui peut dégénérer en deux sphères. — Nach dem Auszug. *Borůvka* (Brünn).

Schuster, Jan: Über konchoidale Kurven. Čas. mat. fys. 70, D 153—D 181 (1941) [Tschechisch].

Elementare Betrachtungen über ebene Kurven, deren durch einen Punkt hindurchgehende Sehnen eine konstante Länge besitzen, mit besonderer Hinsicht auf ihre affine und projektive Erzeugung. *O. Borůvka* (Brünn).

Apéry, Roger: Sur les quintiques à cinq rebroussements. C. R. Acad. Sci., Paris 213, 674—676 (1941).

Del Pezzo hat die Existenz ebener Kurven mit den folgenden Plückerschen Charakteren nachgewiesen: Ordnung = Klasse = Zahl der Spitzen = Z. d. Wendepunkte = 5, Z. d. Doppelpunkte = Z. d. Doppeltangenten = 0; sie sind elliptisch. Verf. beweist auf Grund ihrer Uniformisierung durch die \wp -Funktion, daß jede derartige Kurve C zu einem bestimmten Kegelschnitt autopolar ist, d. h. durch die Polarität an diesem Kegelschnitt in sich selbst übergeführt wird. *Harald Geppert* (Berlin).

Ciani, E.: Sopra un gruppo notevole di collineazioni piane. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 177—187 (1941).

Im Anschluß an seine Arbeit: Alcune osservazioni sopra la configurazione di Kummer [Giorn. di Mat. 36, 68—76 (1898)] behandelt Verf. die Gruppe eines speziellen Tetrahexagons. Unter einem Tetrahexagon versteht er die Figur von sechs Punkten eines Fundamentalkegelschnitts, welche vier Involutionen gestattet. Läßt man zu, daß von den Punkten des Tetrahexagons je zwei Doppelpunkte einer Involution sein dürfen, so existiert der Spezialfall, in dem das Tetrahexagon noch drei zusätzliche Involutionen gestattet. Mit diesem Falle beschäftigt sich der Verf. Er beginnt mit einer analytischen Darstellung der Figur, gibt die sieben Involutionen an und beschreibt die von ihnen erzeugte Gruppe G_{12} . Diese binären Projektivitäten erzeugen ternäre Kollineationen, die angegeben und auf ihre Charakteristik hin untersucht werden. Unter den geordneten Sechsecken des Tetrahexagons ist eines besonders bemerkenswert, das zugleich Brianchonsche Sechseck ist. Der Brianchonsche Kegelschnitt berührt den Fundamentalkegelschnitt doppelt. Die Punkte des Tetrahexaeders sind sechs Basispunkte eines Büschels von Kurven 3. Ordnung, dessen drei übrige Basispunkte Wendepunkte aller Kurven des Büschels sind. Zu jedem Tetrahexagon gehört ein zweites, mit ihm invariant verbundenes. Die Beziehung der beiden Tetrahexagone zueinander ist symmetrisch. Die Gruppe G_{12} als Untergruppe einer Oktaedergruppe G_{24} . E. A. Weiss.

Ciani, Edgardo: Due casi particolari metrici notevoli del tetraesagono e dell'esoesagono. Period. Mat., IV. s. 21, 234—238 (1941).

Verf. nennt Tetrahexagon und Hexahexagon die Figur der 6 singulären Punkte einer singulären Ebene einer Kummerschen Konfiguration, welche bzw. vierfach oder sechsfach tetraedral ist. In früheren Behandlungen (siehe z. B. dies. Zbl. 23, 365; 24, 274, 338) hat Verf. auch die Kollineationsgruppen betrachtet, für welche diese Figuren invariant sind. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß man das regelmäßige Sechseck und das Quadrat (einschließlich der zwei zyklischen Punkte seiner Ebene) als Modelle der zwei Hexagone annehmen kann, und es werden in sehr einfacher Weise die Gleichungen der genannten Kollineationsgruppen abgeleitet. U. Morin.

Godeaux, Lucien: Sur une configuration géométrique dans l'espace à quatre dimensions. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 27, 183—188 (1941).

Im projektiven S_4 mit den homogenen Koordinaten $x_0 \dots x_4$ betrachtet Verf. die Homographie $\Omega: x_0 \rightarrow x_0, x_i \rightarrow \varepsilon^i x_i$ ($i = 1 \dots 4$), wo ε eine primitive 5. Einheitswurzel bezeichnet, und die Homographie $\Omega_0: x_i \rightarrow x_{i+1}$ ($i = 0 \dots 3$), $x_4 \rightarrow x_0$. Ω und Ω_0 sind vertauschbar und erzeugen eine Punktinvolution J_{25} der Ordnung 25. Auch die Homographien $\Omega^i \Omega_0 = \Omega_i$, ($i = 1 \dots 4$) haben je die Periode 5, führen jede Punktgruppe der J_{25} in sich über, sind untereinander und mit Ω, Ω_0 vertauschbar und besitzen wie diese je genau 5 Fixpunkte und Fixhyperebenen, deren Koordinaten angegeben werden. Die 5 Fix- S_3 einer der betrachteten 6 Homographien formen ein Pentaeder, und diese 6 Pentaeder bilden die besondere, vom Verf. studierte Konfiguration. Die Scheitel der 6 Pentaeder verteilen sich zu je 6 auf 25 Ebenen, so daß jede Ebene genau einen Scheitel jedes Pentaeders enthält; durch jeden Scheitel gehen 5 dieser Ebenen. Entsprechend gibt es 25 Geraden, durch deren jede je eine Hyperebene jedes Pentaeders läuft und so daß jede Hyperebene je 5 dieser Geraden enthält.

Harald Geppert (Berlin).

Marletta, G.: Ultraspazi. Esercitazioni Mat., II. s. 13, 170—173 (1941).

Wie in früheren Arbeiten des Verf. [vgl. insb.: Preliminari di geometria proiettiva ad infinite dimensioni. Atti Ist. Veneto Sci. 76, 1187—1197 (1917)] werden lineare Mannigfaltigkeiten S des abzählbar dimensional euklidischen Raumes betrachtet. Einen unendlichvielfach dimensional S nennt er vom Rang n , wenn S mit jedem n -dimensionalen S_n wenigstens einen gemeinsamen Punkt (im Sinne der projektiven Geometrie) und mit wenigstens einem S_n einen einzigen gemeinsamen Punkt besitzt. Der mit negativem Vorzeichen versehene Rang spielt in manchen Sätzen eine zur Dimension

völlig analoge Rolle, und durch ihn wird eine entsprechende Erweiterung einiger weiterer Begriffe ermöglicht.

G. Hajós (Budapest).

Algebraische Geometrie:

Libois, P., et P. Defrise: Sur les notions de point et de courbe en géométrie birationnelle des surfaces. (*Liège, 17.—22. VII. 1939.*) C. R. Congr. Sci. Math. 132—139 (1939).

Gli AA. mettono in evidenza il fatto, ben noto ad ogni cultore della geometria algebrica, che i concetti di curva e di punto su una superficie algebrica, presi nel senso proiettivo, non hanno carattere invariante di fronte alle trasformazioni birazionali. Poichè è bene che in ogni geometria si operi con concetti invarianti rispetto al gruppo delle trasformazioni, che caratterizzano quella geometria, gli AA. propongono l'introduzione dei concetti di „curva-punto“ e di „curva“, come insieme delle sue curve-punti; tali concetti hanno carattere invariante, per guisa che ogni trasformazione birazionale di una F in una F' muta le curve-punti e le curve di F nei corrispondenti elementi di F' , senza alcuna eccezione. Si tratta in sostanza di introdurre un linguaggio, nel quale si tenga conto automaticamente di quelle convenzioni, in rapporto alle curve eccezionali, ai punti infinitamente vicini, ai punti multipli, ai punti base dei sistemi lineari, ecc. . . ., di cui si fa costante uso nella geometria algebrica nel parlare di trasformati di punti o di curve.

Conforto (Rom).

Amodeo, Federico: I numeri ϱ_α nel nuovo metodo per la geometria delle serie lineari delle curve algebriche. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. 10, 194—221 (1940).

Verf. betrachtet eine ebene algebraische Kurve C , die nur mit Knotenpunkten versehen ist, und nennt ϱ_α den Überschuß des linearen Vollsystems der adjungierten Kurven $\varphi_{n-3-\alpha}$ der Ordnung $n-3-\alpha$. Es erweist sich $\varrho_\alpha \leq \frac{1}{2}\alpha(m-3-\alpha)$. Verf. behauptet, daß, wenn α oder m eine gerade Zahl ist, das Maximum für ϱ_α erreicht werden kann. Daraus folgen viele interessante Sätze über spezielle Punktscharen, die jedoch nur für die projektiv ausgezeichneten Scharen gelten, die auf der projektiven C von den $\varphi_{n-3-\alpha}$ ausgeschnitten werden.

U. Morin (Padova).

Amodeo, Federico: La curva di Abel di gonality 38. *Giorn. Mat. Battaglini*, III. s. 76, 138—140 (1939).

Abel hat bewiesen, daß die kleinste Ordnung der linearen Scharen, die auf einer besonderen ebenen Kurve 14-ter Ordnung (die unter andern einen neunfachen Punkt besitzt) von den adjungierten Kurven ausgeschnitten werden, 38 ist. Verf. bringt diesen Satz in eine direkte Beziehung zu seinen Betrachtungen über Kurven, die nur mit Doppelpunkten versehen sind.

U. Morin (Padova).

Longhi, Ambrogio: Contributo alla geometria sulle curve ellittiche. *Atti Accad. Italia, Mem.* 12, 259—278 (1941).

Die Theorie der elliptischen Involutionen γ_α^1 , die einer nichtsingulären elliptischen Kurve C angehören, besitzt schon eine ziemlich weite Literatur (s. L. Berzolari, *Enzykl. d. math. Wiss.*, III. C. 11, 1945—1946; dies. Zbl. 8, 80). Ihre Behandlung nimmt eine sehr durchsichtige Form an, wenn die Kurve C durch ihre Integrale 1. Gattung parametrisch dargestellt wird (s. F. Enriques und O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* IV, S. 87, Bologna 1934; dies. Zbl. 9, 159); dieselbe Methode wird hier vom Verf. angewendet, um neue Sätze dieser Theorie zu gewinnen. — Zunächst findet er eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Involutionen $\gamma_\alpha^1, \gamma_\beta^1$ auf der Kurve C birational identisch seien; diese Bedingung kann man z. B. folgendermaßen aussprechen: Ist Δ das kleinste gemeinsame Vielfache von α, β , so müssen $\Delta:\alpha$ und $\Delta:\beta$ die Quadrate zweier ganzen Zahlen ϱ, σ sein; außerdem müssen die Gruppen der ϱ -fachen Punkte aller mit γ_α^1 zusammengesetzten Scharen $g_{\alpha\varrho}^{\varrho-1}$ und die Gruppen der σ -fachen Punkte aller mit γ_β^1 zusammengesetzten $g_{\beta\sigma}^{\sigma-1}$ eine einzige Involution γ_Δ^1 erschöpfen. Im Falle $\beta = 1$ fällt dieser Satz mit einem bekannten von G. Torelli angegebenen Satze zusammen. Im Falle $\alpha = \beta$ hat man, daß zwei verschiedene

Involutionen γ_α^1 immer birational verschieden sind; wenn die zwei γ_α^1 primitiv sind, ist diese Eigenschaft in der Darstellung von Enriques und Chisini schon enthalten. — Einfach und schön ist der Satz, daß die Anzahl der birational verschiedenen elliptischen γ_n^1 einer gegebenen Ordnung n gleich der Summe aller Teiler von n ist (1 und n mitgerechnet). — Als Anwendung findet man leicht die Anzahl aller Gruppen $\gamma_{n_1}\gamma_{n_2}\dots\gamma_{n_r}$ von r birational verschiedenen Involutionen; es gibt solche Gruppen nur, wenn die Quotienten der Zahlen n_i durch ihren gr. g. T. δ Quadrate ganzer Zahlen sind; ihre Anzahl ist gleich der Summe aller Teiler von δ (1 und δ mitgerechnet). — Verschiedene Anwendungen. *E. G. Togliatti* (Genova).

Lorent, H.: Transformations de courbes planes. (1. comm.) An. Fac. Ci. Pôrto 26, 5—20 (1941).

Verf. betrachtet eine ebene Cremonaabbildung, die folgendermaßen hergestellt wird. Nach Zugrundelegung des festen Kegelschnitts $Ax^2 + By^2 = C$ wird dem Punkte P ein Bildpunkt P' zugeordnet so, daß OP' mit der zu OP konjugierten Durchmessergeraden einen gegebenen festen Winkel α bildet und entweder a) PP' parallel einer vorgegebenen Geraden ist oder b) durch einen festen Punkt läuft. Für besondere Werte von α kann diese Transformation periodisch ausfallen. Verf. untersucht nun in großer Ausführlichkeit die von P' beschriebenen Kurven, wenn P eine vorgegebene Kurve (Gerade, Kegelschnitt, Zissoide, Strophoide usw.) durchläuft, und gewinnt damit neue Konstruktionen spezieller Kurven. *Harald Geppert* (Berlin).

Lorent, H.: Transformations de courbes planes. (2. comm.) An. Fac. Ci. Pôrto 26, 65—83 (1941).

Bei der vorstehend besprochenen Abbildung ändert Verf. die Bedingungen a) und b) dahin ab, daß PP' entweder c) mit OP oder d) mit OP' einen festen vorgegebenen Winkel bilden soll. Es folgt wieder die Untersuchung der Bilder spezieller Kurventypen. *Harald Geppert* (Berlin).

Goormaghtigh, R.: Sur deux transformations géométriques. Mathesis 54, 222—227 (1940).

H. Lorent (dies. Zbl. 25, 355) hat zwei geometrische Abbildungen untersucht: die erste (T) ordnet dem Punkt P der Kurve C den Schnittpunkt P' der Tangente in P mit dem in O auf OP errichteten Lote zu; die zweite (T_1) ordnet P den Schnittpunkt \bar{P} der Tangente in P mit dem Spiegelbild der Geraden OP an der x -Achse zu; P' , \bar{P} beschreiben die Bildkurven C' , \bar{C} von C . In Polarkoordinaten lautet T : $r' = -r^2 \frac{dr}{d\theta}$, $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$. Mittels der Polarität an einem Kreis um O geht C in C_0 und die Evolute von C_0 in C' über. Aus diesen beiden Bemerkungen läßt sich eine Menge von Einzelergebnissen ableiten. T_1 entsteht aus T durch Überlagerung der Affinität $\bar{x} = x$, $\bar{y} = yi$. Daraus lassen sich die Charaktere von C' und \bar{C} ableiten. *Harald Geppert*.

Pompili, Giuseppe: Sulle trasformazioni Cremoniane che posseggono per curva di punti uniti una sestica con dieci punti doppi. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 684—686 (1940).

In einer früheren Arbeit hat Verf. ein Beispiel einer ebenen Cremonaschen Transformation gegeben, die eine rationale, punktweise invariante Kurve C^6 mit 10 Doppelpunkten besitzt (dies. Zbl. 17, 224); A. B. Coble hat aber bemerkt (dies. Zbl. 21, 153), daß die angegebene Konstruktion dieser Transformation illusorisch ist. Hier gibt Verf. ein neues Beispiel. Sind $P_1P_2\dots P_7ABC$ die 10 Doppelpunkte einer ebenen rationalen C^6 , so kann man in der Ebene die zwei Involutionen T_A, T_B der 4. Art der Klassifikation von E. Bertini betrachten, deren Fundamentalpunkte in $P_1\dots P_7A$ und $P_1\dots P_7B$ fallen. Die gesuchte Transformation wird von dem Produkte $T = T_A T_B T_A T_B$ geliefert. In der Tat kann man die Kurve C^6 so wählen, daß die beiden Involutionen T_A, T_B auf C^6 , nicht aber in der ganzen Ebene, miteinander vertauschbar sind, so daß T auf C^6 , nicht aber in der ganzen Ebene zur Identität

wird. Einige Besonderheiten werden in den Fällen hervorgehoben, wo zwei der Punkte P_i unendlich nahe liegen, wo drei von ihnen auf einer Geraden oder sechs von ihnen auf einem Kegelschnitt liegen. Es ist auszuschließen, daß drei der Punkte P_i durch einen dreifachen Punkt ersetzt werden.

E. G. Togliatti (Genova).

Derwidué, L.: Sur les éléments fondamentaux des transformations birationnelles hyperspatiales. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, IV. s. 3, 343—376 (1939).

Derwidué, L.: Sur les éléments fondamentaux des transformations birationnelles hyperspatiales. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, IV. s. 4, 1—17 (1941).

Queste due memorie sono dedicate allo studio di qualcuno dei complicati fenomeni, cui danno luogo gli elementi fondamentali, in una corrispondenza birazionale tra due spazi S_r ed S'_r ($r \geq 2$). Sia T una trasformazione cremoniana tra S_r ed S'_r ; l'A. chiama varietà fondamentale ordinaria per la T una V_{r-k} di S_r ($2 \leq k \leq r$), s -pla per le V_{r-1} di S_r che la T muta negli iperpiani di S'_r , quando il sistema dei coni tangenti alle V_{r-1} in un punto generico di V_{r-k} è privo di parti fisse. — Data una varietà fondamentale ordinaria Φ , i rapporti di essa con gli elementi fondamentali corrispondenti per la T in S'_r , dipendono da due ordini di circostanze. Se A è un punto generico di Φ , i coni tangenti alle V_{r-1} in A segano su uno S_{k-1} generico (sghebbato con lo S_{r-k} tangente alla Φ in A) un sistema di V_{k-2} (per ipotesi privo di parti fisse), il quale può essere semplice o composto con un'involuzione di gruppi di punti, o composto con una congruenza di dimensione $k - q - 1$ di varietà a q dimensioni ($1 \leq q \leq k - 2$). S'introduce così un primo carattere della Φ , cioè l'intero q , che l'A. chiama il rango della Φ . Può essere a priori $0 \leq q \leq k - 2$, il caso $q = 0$ corrispondendo all'ipotesi che il predetto sistema di V_{k-2} sia semplice o composto con un'involuzione di gruppi di punti, mentre il caso estremo $q = k - 2$ corrisponde all'ipotesi che il nominato sistema sia composto con un fascio di varietà a $k - 2$ dimensioni. In secondo luogo, preso un S_{r-k+1} per lo S_{r-k} tangente alla Φ in A , le V_{r-1} che toccano in A tale S_{r-k+1} sono ∞^{r-1} e si trasformano negli iperpiani dello S'_r per un punto A' . Al variare dello S_{r-k+1} per lo S_{r-k} tangente alla Φ in A , il punto A' varia descrivendo una varietà Γ' di dimensione $k - q - 1$, che deve ritenersi come la corrispondente del punto A nella T . Al variare di A sulla Φ , varie ipotesi sono a priori possibili per la Γ' . Si tien conto di tutti i casi a priori possibili, ammettendo che la Γ' possa variare in un sistema ∞^{r-k-l} e descriva una $V_{r-q-l-h}$ ($l \geq 0$; $h \geq 0$); si dice allora che la Φ è di specie $l + 1$ e di h -simo tipo. La $V_{r-q-l-h}$ è la varietà fondamentale Φ di S'_r , corrispondente alla Φ di S_r . — Ciò premesso l'A. approfondisce tutti i casi a priori possibili per il rango, la specie ed il tipo, senza preoccuparsi in un primo tempo, della loro possibile esistenza effettiva. Si trova così ad es. che, se $l > 0$ ovvero $l = 0$, $h \geq 2$, la varietà Φ' è ancora fondamentale ordinaria di rango q , e quindi compie nello S'_r lo stesso ufficio della Φ in S_r . In ogni caso, la dimensione di una varietà fondamentale ordinaria è uguale alla dimensione dello spazio ambiente aumentata di un'unità e diminuita della somma della specie, del tipo e del rango della varietà fondamentale corrispondente. — Successivamente l'A. affronta le questioni d'esistenza, realizzando, con opportuni procedimenti ricorrenti, effettivi esempi di trasformazioni birazionali, che possiedono varietà fondamentali ordinarie di ogni rango, tipo o specie a priori possibile.

Conforto (Roma).

Emch, Arnold: Zwei Abbildungsprobleme. Comment. math. helv. 12, 246—253 (1940).

È ben noto che, indicando con $x_1 x_2 x_3$ e con $y_1 y_2 y_3 y_4$ le coordinate proiettive omogenee d'un punto in un piano o nello spazio, le formole:

$$\varrho y_1 = x_2 x_3, \quad \varrho y_2 = x_3 x_1, \quad \varrho y_3 = x_1 x_2, \quad \varrho y_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

forniscono la rappresentazione piana d'una F^4 di Steiner, in modo che alle sezioni piane di F^4 corrispondono le coniche d'un sistema lineare ∞^3 . Alla sezione di F^4 col piano tangente in un suo punto P , sezione che è spezzata in una coppia di coniche,

corrisponde sul piano una coppia di rette di equazioni $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, $u_2u_3x_1 + u_3u_1x_2 + u_1u_2x_3 = 0$, che s'incontrano nel punto P' immagine di P . Risolvendo queste equazioni rispetto alle u_i si hanno le due rette della coppia relative ad un dato $P'(x_i)$; secondochè esse son reali o complesse coniugate il punto P di F^4 è iperbolico od ellittico. In questa risoluzione compare il radicale quadratico:

$$R(x_i) = \sqrt{-(x_1 + x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3)},$$

dal quale dipende la realtà o meno di quelle due rette. Si trova così che le quattro rette $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ dividono il piano in varie regioni, alcune delle quali rappresentano su F^4 zone di punti ellittici e le altre zone di punti iperbolici. La rappresentazione riesce assai semplice pensando le x_i come coordinate cartesiane omogenee. — Ricorrendo invece alle formole:

$$\sigma x_1(x_2^2 + x_3^2) = y_1, \quad \sigma x_2(x_3^2 + x_1^2) = y_2, \quad \sigma x_3(x_1^2 + x_2^2) = y_3, \quad \sigma x_1x_2x_3 = y_4$$

si ottiene una rappresentazione piana d'una F^3 con quattro punti doppi, in modo che ad ogni punto di F^3 corrispondono sul piano due punti fra loro omologhi nell'involuzione quadratica $\varrho x'_i = \frac{1}{x_i}$. Alle sezioni piane di F^3 corrispondono le C^3 d'un

sistema lineare ∞^3 composto con l'involuzione anzidetta. Alla sezione di F^3 col piano tangente in un suo punto P corrisponde una C^3 del sistema spezzata in una retta $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ ed una conica $a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2 = 0$ fra loro omologhe nell'involuzione; al punto P corrisponde la coppia dei punti P_1, P_2 comuni alla retta ed alla conica; e P è su F^3 iperbolico od ellittico secondochè P_1, P_2 sono reali o complessi coniugati. Calcolando allora le coordinate di P_1, P_2 si ritrova l'espressione $\bar{R}(a_i)$, e si stabilisce quindi quali sono le rette P_1P_2 del piano a cui corrispondono su F^3 punti sia ellittici sia iperbolici.

E. G. Togliatti (Genova).

Severi, Francesco: La teoria generale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica. Atti Accad. Italia, Mem. 12, 337—430 (1941).

Nach einer ausgedehnten historischen Darstellung der Theorie der kontinuierlichen Kurvensysteme auf einer algebraischen Fläche F , die aus der vom Verf. 1904 gegebenen Idee der charakteristischen Schar sich weiter entwickelt hat (Severi, Castelnuovo, Picard, Enriques, Poincaré, B. Segre), werden schon bekannte Sätze unter weit allgemeineren Voraussetzungen bewiesen und ergänzt und unvermutete Sätze neu gefunden. Dies erreicht Verf. durch Ergänzung der klassischen algebraisch-geometrischen, transzendenten und topologischen Beweismittel durch neue, von ihm geschaffenen Begriffe, wie den der Äquivalenzscharen und der Abelschen Scharen (d. h. Gruppen von Punkten einer Kurve, in denen die reduziblen Integrale eines regulären Systems konstante Werte annehmen, deren Theorie hier bis zu einem Riemann-Rochschen Satze entwickelt wird). Einige der Hauptsätze sind: I. Allgemeiner Existenz-, Eindeutigkeits- und Vollständigkeitssatz. Auf einer beliebigen F sei C eine Kurve, die aus t verschiedenen irreduziblen Kurven C_1, \dots, C_t zusammengesetzt ist und nur Knotenpunkte, einschließlich der Punkte, die die einzelnen Teile zu je zweien gemeinsam haben, besitzt. Einige P dieser Knotenpunkte seien beliebig als fest, andere Q (in der Anzahl h) als virtuell veränderlich und die übrigbleibenden R als virtuell nicht existierend angenommen. Damit die so erklärte C Vollkurve eines kontinuierlichen Systems sei, d. h. damit sie Grenzfall einer auf F veränderlichen Kurve \bar{C} gleicher Ordnung sei, die in der Grenze die neuen Knotenpunkte R annimmt, Basispunkte nur in den Knotenpunkten P hat und h wirklich veränderliche und nach den Q strebende Knotenpunkte \bar{Q} besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die charakteristische Äquivalenzschar auf C effektiv sei und für diese: a) keiner der Punkte der Paare P, P fest sei; b) keines der Punktepaare Q, Q fest sei; c) die Punktepaare R, R neutral, aber nicht fest seien. Mehrere Teile der C sind Grenzfälle eines einzigen irreduziblen Teiles der \bar{C} dann und nur dann, wenn sie vermittels einiger Knotenpunkte R

ein zusammenhängendes System bilden. Mit den angegebenen virtuellen Bedingungen ist C Vollkurve eines einzigen kontinuierlichen Vollsystems $\{C\}$, das von jeder \bar{C} , die nur die festen Knotenpunkte P und die veränderlichen \bar{Q} hat, bestimmt wird. C sowohl als \bar{C} sind jede Ursprung eines einzigen linearen Mantels des Systems $\{C\}$, und dessen charakteristische Äquivalenzschar ist auf jeder dieser Kurven vollständig. — II. Allgemeiner Zerlegungssatz. Auf einer Fläche F vom geometrischen Geschlecht p_g sei E eine veränderliche, irreduzible, nur mit Knotenpunkten versehene Kurve, die als Grenzfall zu einer reduzierbaren, ebenfalls nur mit Knotenpunkten versehenen Kurve wird. Außerdem sei C ein irreduzierbarer Teil der Grenzkurve und D der (irreduzible oder reduzierbare) Restteil. Dann ist mindestens einer der Punkte der Schnittgruppe (C, D) ein neuer Knotenpunkt der Grenzkurve. Die Anzahl dieser neuen Knotenpunkte in (C, D) ist mindestens gleich $p_g + 1$ (und dieses Minimum kann wirklich erreicht werden), oder diese Punkte legen den unbereinigten kanonischen Kurven der F abhängige Durchgangsbedingungen auf. — III. Zusammenhang zwischen dem Defekt der charakteristischen Schar eines linearen Kurvensystems und der Existenz reduzierbarer Integrale erster Art auf F . 1. Wenn auf F ein nicht überschießendes lineares Kurvensystem $|C|$ [d. h. $|C|$ gehört einem algebraischen, irreduzierbaren Vollsistem $\{C\}$ von linearen Kurvensystemen an und hat die gleiche Dimension wie das allgemeine lineare Kurvensystem aus $\{C\}$], mit irreduzierbarer und doppelpunktfreier allgemeiner Kurve C existiert, dessen charakteristische Schar einen unterhalb der Irregularität $q = p_g - p_a$ von F gelegenen Defekt $q' > 0$ hat, dann besitzt F ein reguläres $\infty^{q'-1}$ System reduzierbarer Integrale erster Art. 2. Auf F sei C eine irreduzible, doppelpunktfreie Kurve und $|C|$ gehöre einem System $\{C\}$ vom Grade > 0 an, das aus analogen linearen Kurvensystemen bestehe. Dann ist die Abweichung $\lambda = q - q'$ des Defektes der charakteristischen Schar von $|C|$ von der Irregularität q der F gleich der Anzahl der unabhängigen Integrale erster Art von F , die konstante Summen in den Gruppen der abelschen charakteristischen Schar von $\{C\}$ annehmen. Diese Integrale bilden ein reguläres System mit 2λ reduzierten Perioden. — IV. Ergänztter Riemann-Rochscher Satz. Hat man auf F eine arithmetisch und folglich effektiv existierende, virtuell von Basispunkten freie, irreduzible oder reduzierbare Kurve C , so bestimmt diese ein lineares System $|C|$ der Dimension

$$r = n - p + p_a + 1 - j + \sigma, \quad (\sigma = i + j - p_g + \lambda),$$

wo n, p den virtuellen Grad und das virtuelle Geschlecht von C , i den Spezialitätsindex von (C, C) , j den Spezialitätsindex von C bedeuten und $\lambda = q - q'$ (III) ist. Es ist $\lambda = 0$, wenn $|C|$ die Dimension > 1 hat, frei von mehrfachen Basispunkten ist und einem System $\{C\}$ von unendlich vielen analogen Linearsystemen angehört. Insbesondere ist $|C|$ regulär ($j = \sigma = 0$), wenn: 1) $|C|$ irreduzibel, virtuell frei von Basispunkten und einem unendlichen linearen Kurvensystem adjungiert ist, dessen veränderliche Kurve nicht aus den Kurven eines irrationalen Büschels zusammengesetzt sei; 2) $|C|$ ein plurikanonisches System auf einer Fläche F mit $p_g > 2$ und irreduzierbarem, bereinigtem, kanonischem System ist; 3) C irreduzibel, virtuell frei von Basispunkten ist und $3n > 4(p-1)$, $2n > 3(p-1) - \omega' - p_a$ (ω' relatives Kurvengeschlecht von F) ist, so daß $|C|$ einem unendlichen Linearsystem $|D|$ adjungiert ist (und folglich regulär ist, außer wenn der veränderliche Teil von D aus Kurven eines irrationalen Büschels zusammengesetzt ist); 4) $2n > 3p - 2$ ist für jedes, virtuell von Basispunkten freie irreduzible System $|C|$ auf einer Fläche F , die kein rationales Büschel trägt, deren bereinigtes kanonisches System irreduzibel ist oder aus einer Kurve der Ordnung Null besteht, und die von den ausgezeichneten Kurven befreit ist.

U. Morin (Padova).

Burniat, Pol: Sur quelques surfaces cycliques. (Liège, 17.—22. VII. 1939.) C. R. Congr. Sci. Math. 97—100 (1939).

Gegeben seien zwei (irreduzible) algebraische Kurven \bar{c}_1 und \bar{c}_2 ; f bezeichne die

Fläche, die das Bild der aus je einem Punkt von \bar{c}_1 und \bar{c}_2 gebildeten Paare darstellt. Auf f gibt es zwei Büschel $\{c_1\}$ und $\{c_2\}$ von Kurven, die mit \bar{c}_1 und \bar{c}_2 birational identisch sind und sich paarweise in je einem Punkte schneiden. Man betrachtet außerdem noch eine Fläche $n f = F_1$, wo n eine Primzahl ist; ihre Verzweigungskurve sei mit Kurven aus $\{c_1\}$ und $\{c_2\}$ zusammengesetzt. Unter dieser Voraussetzung beweist Verf., daß F_1 ihrerseits das Bild einer zyklischen Involution auf einer gewissen Fläche F ist. F ist wieder Bild der Punktepaare von zwei Kurven. F gestattet eine abelsche Gruppe der Ordnung n^2 von birationalen, zyklischen, automorphen Transformationen. Diese erzeugen $n + 1$ Involutionen, welche gleichfalls Flächen vom Typus $n f$, analog zu F_1 , darstellen. — Von F_1 gibt Verf. auch die Ausdrücke für $p_a, p_g, p^{(1)}$ an, ohne aber zu sagen, durch welche Rechnung er zu ihrer Bestimmung gelangt ist.

Luigi Campedelli (Firenze).

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces du quatrième ordre, circonscrites à deux tétraèdres de Moebius. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 27, 472—486 (1941).

$R_1 R_2 R_3 R_4$ und $R'_1 R'_2 R'_3 R'_4$ sei ein Möbiussches Tetraederpaar, Φ eine der ∞^5 Flächen 4. Ordnung mit Doppelpunkten in R_i, R'_i ($i = 1, \dots, 4$). Dann entsprechen sich die beiden Tetraeder in einer zweiachsigen harmonischen Homographie T mit den Achsen r, r' , die auf jeder Φ eine Involution 2. Ordnung mit 8 Doppelpunkten erzeugt und die daher, ebenso wie Φ , die Geschlechter $p_a = p_g = P_2 = \dots = 1$ besitzt. Enthält Φ die vier Geraden $\gamma_i = R_i R'_i$, denen auf Φ der virtuelle Grad -2 zukommt, so enthält sie weitere 8 paarweise windschiefe Geraden β_i, β'_i . Bezieht man die durch die γ_i, r, r' gehenden kubischen Flächen projektiv auf die Ebenen eines zweiten Raumes, so bildet sich Φ in eine Fläche 4. Ordnung Φ' ab, die wiederum die Ecken eines Möbiusschen Tetraederpaares $S_1 \dots S_4, S'_1 \dots S'_4$ zu Doppelpunkten besitzt und die Geraden $S_i S'_i$ sowie weitere 8 paarweise windschiefe Geraden α_i, α'_i enthält. Dabei gehen β_i, β'_i in die je einer rationalen Kurve des virtuellen Grades -2 entsprechenden Umgebungen der Doppelpunkte S_i, S'_i über, während α_i, α'_i den Umgebungen der R_i, R'_i entsprechen. Φ und Φ' sind hyperelliptisch; sie sind die Bilder einer Involution 2. Ordnung auf einer Picardschen Fläche mit $p_a = -1, p_g = P_2 = \dots = 1$, deren Verzweigungspunkte den $R_i, R'_i, \beta_i, \beta'_i$ äquivalent sind.

Harald Geppert.

Godeaux, Lucien: Étude de quelques involutions cycliques appartenant à des surfaces algébriques. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 27, 9—21 (1941).

Die Arbeit gehört in den Umkreis der zahlreichen Untersuchungen des Verf. über Involutionen auf algebraischen Flächen, die nur eine endliche Anzahl von Deckpunkten besitzen. Zunächst sei F die allgemeinste Fläche 8. Ordnung des S_3 , die bezüglich der Homographie $T: x_1 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow \eta x_2, x_3 \rightarrow \eta^4 x_3, x_4 \rightarrow \eta^3 x_4, \eta = \text{primitive 5. Einheitswurzel}$, automorph ist. T erzeugt auf F eine Involution J_5 mit den vier Ecken des Fundamentaltetraeders als Deckpunkten. Mit den bekannten Methoden des Verf. wird die Struktur dieser Deckpunkte analysiert. Die Gruppen der J_5 lassen sich birational auf die Punkte einer Fläche Φ mit den Geschlechtern $p_a = p_g = 7, p^{(1)} = 25$ abbilden. Die Homographie $x_1 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow \eta x_2, x_3 \rightarrow \eta^{19} x_3, x_4 \rightarrow \eta^{18} x_4$ mit $\eta^{25} = 1$ läßt die Fläche $a_1 x_1^7 x_2 + a_2 x_2^7 x_3 + a_3 x_3^7 x_4 + a_4 x_4^7 x_1 + b_1 x_1^4 x_3^4 + b_2 x_1^2 x_2^2 x_3^4 + b_3 x_2^4 x_4^4 = 0$ invariant und erzeugt auf ihr eine J_{25} mit den gleichen Deckpunkten wie die J_5 ; ihre Struktur wird festgestellt. Die J_{25} läßt sich birational auf eine Fläche mit $p_a = p_g = 3, p^{(1)} = 1$ abbilden. Schließlich stellt Verf. eine von 10 linearen Parametern abhängende Fläche F' 6. Ordnung auf, die gegen die Homographie $x_1 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow \varepsilon x_2, x_3 \rightarrow \varepsilon^3 x_3, x_4 \rightarrow \varepsilon^6 x_4, \varepsilon = \text{primitive 7. Einheitswurzel}$, invariant ist; letztere erzeugt auf ihr eine J_7 mit drei Deckpunkten in Ecken des Bezugstetraeders, deren Gruppen birational äquivalent zu den Punkten einer Fläche Φ' mit $p_a = p_g = p^{(1)} = 1$ sind; hier zeigt sich die Merkwürdigkeit, daß das umfassendste, mittels J_7 zusammengesetzte lineare Kurvensystem auf F' , das das doppelt-gezählte Bild der kanonischen Kurve von Φ' enthält, das Bild des bikanonischen Systems von Φ' enthält, ohne mit ihm zusammenzufallen.

Harald Geppert (Berlin).

Godeaux, Lucien: Construction de quelques surfaces algébriques. (*Liège, 17.—22. VII. 1939.*) C. R. Congr. Sci. Math. 142—144 (1939).

Verf. knüpft an seine Untersuchungen über die Involutionen auf einer algebraischen Fläche an und will die erhaltenen Ergebnisse durch Beispiele erläutern. Er gibt hier die Konstruktion von gewissen Flächenfamilien an. — Er betrachtet die Fläche Φ der Ordnung m^2 , die durch eine Projektivität zwischen dem System der ebenen Kurven m -ter Ordnung und dem der Hyperebenen eines Raumes S_r mit $r = \frac{1}{2}m(m+3)$ erzeugt wird. In einem den S_r enthaltenden S_{r+1} sei V_3 der Kegel, der Φ aus einem Punkte O (außerhalb von S_r) projiziert, und V_2 der Kegel, den man durch Projektion einer auf Φ liegenden Kurve der Ordnung mk ($0 < k < m$) aus demselben Punkte O erhält. Schließlich sei V_r^n eine Hyperfläche des S_{r+1} , die einfach durch O geht und den Kegel V_2 enthält; diese V_r^n schneidet weiterhin V_3 längs einer Fläche F , die Verf. untersucht. Nach Feststellung einiger projektiver Charaktere (Ordnung, Vielfachheit in O , usw.) beweist er ihre Regularität und konstruiert auf ihr das kanonische System. — Besondere Fälle (fehlendes kanonisches System, kanonische Kurven nullter Ordnung, mit den Hyperebenenschnitten zusammenfallende kanonische Kurven).

Luigi Campedelli (Firenze).

Godeaux, Lucien: Sur une propriété de la variété des cordes d'une surface de Veronese. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 27, 411—417 (1941).

La varietà V_4^3 di Segre che rappresenta le coppie di punti di due piani è mutata in sè da un' omografia involutoria Ω dello spazio S_8 in cui essa è immersa; gli spazi di punti uniti dell'omografia Ω sono un piano π che non incontra V_4^3 ed un S_5 che taglia V_4^3 secondo una superficie di Veronese. Riferendo proiettivamente gli iperpiani che passano per π agli iperpiani d'un S_5 si rappresenta V_4^3 sulla varietà M_4^3 delle corde d'una superficie Ψ di Veronese, in modo che ad ogni punto di V_4^3 corrisponde un punto di M_4^3 e ad ogni punto di M_4^3 corrispondono due punti di V_4^3 omologhi nell'omografia Ω . Alle sezioni di V_4^3 con forme cubiche contenenti π e mutate in sè da Ω corrispondono le sezioni di M_4^3 con forme cubiche generiche dell' S_5 . Ed allora, applicando risultati precedenti dello stesso A (questo Zbl. 16, 179) che riguardano le sezioni di V_4^3 con forme cubiche, si trova che le V_3^3 sezioni di M_4^3 con forme cubiche hanno superficie canoniche e pluricanoniche d'ordine zero, e posseggono come sezioni iperpiane delle superficie proiettivamente canoniche di generi $p_g = p_a = 5$, $p^{(1)} = 10$. Più in generale, le V_3^{3n} sezioni di M_4^3 con forme d'ordine n hanno come superficie canoniche le loro sezioni con forme d'ordine $n-3$.

E. G. Togliatti (Genova).

Fano, Gino: Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche. Comment. math. helv. 14, 202—211 (1941).

Die vorliegende Untersuchung ist eine Fortsetzung und Verfeinerung früherer Arbeiten desselben Verf. (dies. Zbl. 15, 372; 16, 133), die den Mannigfaltigkeiten M_3^{2p-2} eines Raumes S_{p+1} gewidmet sind, deren Schnittkurven kanonische Kurven sind. Verf. hat schon bewiesen, daß alle diese M_3^{2p-2} für $p > 10$ rational sind, den einzigen Fall $p = 13$ ausgeschlossen, der unentschieden bleibt. Hier beweist er, daß auch die Fälle $p = 9$ und $p = 10$ zu rationalen Mannigfaltigkeiten führen, vorausgesetzt, daß alle ihre Flächen vollständige Schnitte mit Hyperflächen seien. Zu diesem Zweck betrachtet er zunächst die M_3^{12} des S_8 ($p = 7$), immer im Falle, daß alle auf ihr liegenden Flächen vollständige Schnitte mit Hyperflächen seien. Die Rationalität der M_3^{12} , die in den vorigen Abhandlungen schon gesichert worden war, wird hier neuerdings und einfacher auf drei verschiedene Arten bewiesen: durch Projektion der M_3^{12} aus einem Berührungs- S_3 allgemeiner Lage; durch Projektion aus dem S_3 einer auf M_3^{12} liegenden kubischen Raumkurve; durch Projektion aus der Ebene eines der M_3^{12} angehörigen Kegelschnitts. — Die M_3^{16} des S_{10} ($p = 9$) wird dann durch Projektion aus einer ihrer Geraden auf eine M_3^{12} des S_8 abgebildet. (Die Rationalität einer anderen M_3^{16} des S_{10} , deren Schnittflächen von 2. Art sind, bleibt unentschieden und zweifelhaft.) — Die M_3^{18} des S_{11} ($p = 10$) wird schließlich, durch Projektion aus einer ihrer Geraden

und einige weitere Konstruktionen, auf eine Quadrik des S_4 abgebildet. — In den Fällen $p = 5, 6, 8$ bleibt also die Rationalität der M_3^{2p-2} noch unentschieden.

E. G. Togliatti (Genova).

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

Bouvaist, R.: Généralisation d'un théorème de Neuberg. *Mathesis* 54, 261—263 (1940).

Verf. beweist elementaranalytisch den von J. Neuberg aufgestellten Satz: Wenn vier an vier Punkten derselben Ebene angreifende parallele Kräfte im Gleichgewicht sind, so bleiben sie es, wenn man den Angriffspunkt jeder Kraft in den Mittelpunkt des Umkreises desjenigen Dreiecks verlegt, deren Ecken die Angriffspunkte der drei übrigen Kräfte sind. Er verallgemeinert ihn sodann auf fünf an fünf Punkten des Raumes angreifende Parallelkräfte, wobei an Stelle jedes Umkreises die Umkugel um vier Punkte tritt.

K. Fladt (Tübingen).

Graffi, Dario: Sul teorema della divergenza superficiale e sul calcolo delle azioni capillari. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. 4, 8—12 (1941).

σ sei eine Fläche des dreidimensionalen Raumes mit dem Normaleneinheitsvektor n . Ist φ eine skalare Funktion des Raumpunktes M , so definiert P. Burgatti als Flächengradient von φ im allgemeinen Punkt P von σ den Ausdruck:

$$\text{grad}_\sigma \varphi = \text{grad} \varphi - (n \cdot \text{grad} \varphi) n.$$

Ist hingegen u ein mit M veränderlicher Vektor, so wird Flächendivergenz und -rotation erklärt durch

$$\text{div}_\sigma u = \text{div} u - n \cdot \frac{du}{dP} n, \quad \text{rot}_\sigma u = \text{rot} u - n \times \frac{du}{dP} n.$$

Es gelten dann die folgenden Integralformeln:

$$(1) \quad \int_\sigma \text{div}_\sigma u \, d\sigma = \int_\sigma (u \cdot n) \, \text{div} n \, d\sigma + \int_S u \cdot v \, dS,$$

$$(2) \quad \int_\sigma \text{grad}_\sigma \varphi \, d\sigma = \int_\sigma \varphi n \, \text{div} n \, d\sigma + \int_S \varphi v \, dS,$$

$$(3) \quad \int_\sigma \text{rot}_\sigma u \, d\sigma = - \int_\sigma u \times n \, \text{div} n \, d\sigma - \int_S u \times v \, dS,$$

in denen S den Rand von σ , v den nach außen gerichteten Einheitsvektor der Tangentialnormalen von S bedeuten. Verf. gibt mittels des Stokesschen Satzes einen neuen Beweis von (1); (2), (3) sind Folgerungen aus (1). Das Ergebnis verwendet er zu einer neuen Ableitung der Resultate von Serini (dies. Zbl. 25, 217). *Harald Geppert*.

Gasparini, Ida: Sulla composizione di spostamenti rigidi secondo Poincaré. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. 4, 31—37 (1941).

Zwei für dasselbe räumliche System S und dasselbe Zeitintervall gegebene Verschiebungen werden nach Poincaré in der Weise zusammengesetzt, daß bei der resultierenden Verschiebung jeder Punkt von S in jedem Zeitpunkt des betrachteten Intervalls zur Geschwindigkeit die Summe der Geschwindigkeiten erhält, die ihm bei den gegebenen Verschiebungen in diesem Zeitpunkt zukommen. Eine Verschiebung, bei welcher das räumliche System zu sich selbst gleichsinnig kongruent bleibt, sei als starre Verschiebung bezeichnet. Es ist bekannt, daß die Zusammensetzung zweier starrer Verschiebungen i. a. nicht wieder eine starre Verschiebung ergibt, es sei denn, daß eine der gegebenen Verschiebungen eine einfache Parallelverschiebung ist. Verf. untersucht nun, welche besonderen Bedingungen zwei starre Verschiebungen, von denen keine eine Parallelverschiebung ist, erfüllen müssen, damit ihre Zusammensetzung wieder eine starre Verschiebung ist. Er findet, daß die Drehungen der beiden gegebenen Verschiebungen dieselbe Achse zulassen, entgegengesetzten Sinn und supplementäre Drehwinkel besitzen müssen. Nebenbei ergibt sich, daß die Zusammensetzung zweier starrer Verschiebungen nur dann eine Ähnlichkeit sein kann, wenn sie eine starre Verschiebung ist.

W. Schmid (Dresden).

Bloch, Z. Š.: On the theorem of Roberts-Chebyshev. J. appl. Math. a. Mech., N. s. 4, 119—120 u. engl. Zusammenfassung 120 (1940) [Russisch].

Laut dem bekannten Satze von Roberts ist die Erzeugung einer Koppelkurve eines Gelenkvierecks auf dreifache Art möglich. Dasselbe Ergebnis wurde auch von Tschebyscheff mit Hilfe seines Gelenkvierecks festgestellt. Verf. weist nach, die Konstruktion von Roberts-Tschebyscheff benutzend, daß es noch drei sechsgliedrige Getriebe gibt, in denen ein bestimmtes Gelenk dieselbe Koppelkurve beschreibt.
N. Rosenauer (Riga).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Semin, Ferruh: Géométrie infinitésimale des systèmes variables à un paramètre. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A: Math. 6, 62—82 (1941).

Im Anschlusse an G. Peano, Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale (Torino 1887) und Joh. Petersen (= J. Hjelmslev), Dissertation Kopenhagen (1897), hat R. v. Mises, Z. Math. Phys. 52, 44—85 (1905), S. 47 ff., zur Behandlung der konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven den Begriff der Charakteristik eines variablen geometrischen Elementes benutzt, der als geometrisches Äquivalent des analytischen Begriffes der Ableitung dienen kann. Die vorliegende (in Fortsetzung begriffene) Abhandlung erweitert den Kreis der v. Mises'schen Betrachtungen auf den dreidimensionalen Raum und enthält eine ausführliche Erörterung der Charakteristiken erster Ordnung der Grundelemente (Punkte, Geraden, Ebenen) in einem variablen (von Kurven, Flächen, Ebenen, ... aufgebauten) System sowie der Charakteristiken erster Ordnung der durch sie definierbaren variablen Figuren. Die Entwicklungen gestatten die geometrische Lösung von Berührungsproblemen.

K. Strubecker (Wien).

Gürsan, Feyyaz: L'élément infinitésimal d'ordre supérieur d'une courbe gauche. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A: Math. 6, 27—35 (1941).

Bekanntlich läßt sich die Umgebung n -ter Ordnung des Punktes P einer ebenen Kurve durch die Folge der Krümmungsmittelpunkte M, M_1, \dots, M_{n-2} der Kurve und ihrer aufeinanderfolgenden Evoluten, d. h. durch das Polygon $PMM_1 \dots M_{n-2}$, beschreiben. Eine entsprechende Darstellung bei Raumkurven C kann man dadurch erhalten, daß man zu P den Krümmungsmittelpunkt M und das Schmiegekugelmittelpunkt P_1 , vom Ort der P_1 (der sog. Polkurve) ausgehend, entsprechend M_1, P_2 usw. bildet; betrachtet man die entsprechenden Punkte P^*, M^*, P_1^*, \dots einer zu C adjungierten Kurve C^* (für sie gilt bekanntlich $\mathfrak{r}^*(s) = \mathfrak{r}(0) + \int_0^s \mathfrak{B}(t) dt$, wenn $\mathfrak{r}(s)$ den

Ortsvektor, $\mathfrak{B}(s)$ den Binormaleneinheitsvektor von C kennzeichnen), so bestimmen die Polygone $PMP_1M_1 \dots P_{n-1}M_{n-1}$ und $P^*M^*P_1^* \dots M_{n-1}^*$ die Umgebung n -ter Ordnung von P auf C .

Harald Geppert (Berlin).

Tzénoff, Iv.: Points simples et points singuliers des courbes planes. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 35, 251—346 u. franz. Zusammenfassung 347—356 (1939) [Bulgarisch].

Es wird die Gestalt einer ebenen Kurve $\varphi(\mathfrak{r}) = 0$ bzw. $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$ in der Umgebung eines Punktes untersucht. Dazu wird die Taylor-Entwicklung der Funktion $\varphi(\mathfrak{r})$ nach \mathfrak{r} bzw. $\mathfrak{r}(t)$ nach t benutzt. Es ergeben sich in vektorieller Fassung die aus der Theorie der algebraischen Kurven wohlbekannten hinreichenden Bedingungen, damit der Punkt ein Wendepunkt, Doppelpunkt usw. sei. Die vektorielle Ausdrucksweise ermöglicht manche Erleichterungen, ihre sämtlichen Vorteile werden aber nach Ansicht des Ref. nicht ausgenützt.

G. Hajós (Budapest).

Myller, A.: Eine gegen gleichförmige Krümmung invariante Kurve. Gaz. mat. 47, 251—252 (1942) [Rumänisch].

Eine Kurve wird „gleichförmig gekrümmt“, wenn bei der Krümmung sich die Größe des Winkels zwischen je zwei beliebigen Tangenten proportional ändert. Ist s

der Bogen OP einer gegebenen Kurve C , ausgehend vom Koordinatenursprung O , und φ der Winkel zwischen den Tangenten in den Endpunkten O und P des Bogens, und sind s', φ' Bogen und Winkel der transformierten Kurve C' , so drückt sich die Beziehung der „gleichförmigen Krümmung“ durch die Gleichungen $s = s', \varphi = k\varphi'$ (k konstant) aus. Ist $\varrho = f(s)$ die intrinsische Gleichung der Kurve C (ϱ der Krümmungshalbmesser), so führt die Bedingung der Invarianz der Kurve gegen die gleichförmige Krümmung auf die Funktionalgleichung $kf(s) = f(s - s_0)$ ($s_0 = \text{konst.}$), deren Lösung, wenn man $k = e^{-ms_0}$ setzt, die Gleichung $\varrho = ae^{ms}$ ist. Von dieser Kurve hat E. Cesàro (Vorlesungen über natürliche Geometrie, Deutsch von G. Kowalewski, Leipzig 1901) zwei Eigenschaften bewiesen: Sie ist die Evolvente der antilogischen Kurve und die Antiradiale der hyperbolischen Spirale. *Max Zacharias* (Berlin).

Dolaptschiew, Bl.: Eine Berührungstransformation in der Geometrie. Anwendung. (Knotenparabeln.) Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 36, 327—365 u. dtsh. Zusammenfassung 366—367 (1940) [Bulgarisch].

Verf. führt zu einer gegebenen Kurve C der Ebene eine transformierte C' als geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise ein, die durch einen festen Punkt der Ebene gehen und C berühren. Die Fortsetzung dieser Transformation definiert eine Kurvenfamilie mit je um eine Einheit wachsender Ordnung. Ist C eine Gerade, so wird man zur Parabel, kubischen Parabel usw. geführt. Die Eigenschaften der so entstandenen Kurven werden rechnerisch nach verschiedenen Richtungen hin untersucht.

Bureau (Hamburg).

Dolaptschiew, Bl.: Über eine Art von Zylinderkurven. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 35, 357—362 u. dtsh. Zusammenfassung 363 (1939) [Bulgarisch].

In einer früheren Arbeit [Sur certaines courbes tracées sur une surface donnée; Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 28, 287—298 (1931)] hat Verf. für eine beliebige, auf die Parameter u, v bezogene Fläche die Differentialgleichung derjenigen Kurven aufgestellt, längs derer die Hauptnormale mit der Flächennormale einen konstanten Winkel θ mit $\tan \theta = k$ einschließt. In der vorliegenden Arbeit wird diese Differentialgleichung für den Kreiszyylinder: $x = R \cos v, y = R \sin v, z = u$ integriert; das Ergebnis lautet mit zwei Integrationskonstanten β, c :

$$2k(u + c) = R\{\beta^{-1}e^{kv} + \beta e^{-kv}\},$$

d. s. auf den Zylinder aufgewickelte Kettenlinien. Man kann sie auch mechanisch erzeugen; es sind nämlich die Gleichgewichtskurven eines auf dem Zylinder liegenden schweren, homogenen, unausdehnbaren, biegsamen Fadens.

Harald Geppert.

Signorini, A.: Sopra una caratterizzazione della sfera. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 20, 211—212 (1941).

Im Anschluß an die in dies. Zbl. 25, 79 besprochene Arbeit des Ref. macht Verf. darauf aufmerksam, daß, wenigstens auf den Flächen mit einer doppelten Schar von Krümmungslinien, durch Betrachtung infinitesimaler Dreiecke, in denen zwei Seiten auf Krümmungslinien liegen, aus dem Verschwinden der Gesamtwindung jeder Kurve auf das identische Verschwinden der geodätischen Windung auf der Fläche, d. h. auf ihre Kugel- oder Ebeneneigenschaft, geschlossen werden kann.

Harald Geppert.

Colombo, Bonaparte: Sul problema di Bianchi riguardante le superficie isoterme e sugli integrali intermediari di un'equazione a derivate parziali. Mem. Accad. Sci. Torino, II. s. 69, Pt 1, 55—83 (1939).

L'au. s'attaque au problème difficile posé par Bianchi: trouver toutes les intégrales intermédiaires de l'équation $W = 0$ (due à Weingarten) aux dérivées partielles d'ordre 4 des surfaces isothermiques. (Une équation $E_{n-p} = 0$ d'ordre $n - p$ est dite intégrale intermédiaire de l'équation E_n si toutes les surfaces vérifiant E_{n-p} vérifient E_n .) L'au. étudie d'abord d'un point de vue très général les intégrales intermédiaires d'une équation E_n : dans le cas spécial où E_n est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre n (c'est le cas pour W), l'ordre minimum des caractéristiques est $(n - 1)$ au lieu de n .

et chaque caractéristique d'ordre $(n - 1)$ appartient à ∞^1 caractéristiques d'ordre n . On pose

$$\begin{aligned}\lambda &= pqt - (1 + q^2)s, & \mu &= (1 + q^2)r - (1 + p^2)t, & \nu &= (1 + p^2)s - pqr, \\ \theta &= (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t, \\ \eta &= rt - s^2, & \Phi &= \frac{6(p\theta - 2pr - 2qs)\eta + \mu\theta_x + 2\nu\theta_y}{\mu^2 - 4\lambda\nu}, & \Psi &= \frac{6(q\theta - 2ps - 2qt)\eta - 2\lambda\theta_x - \mu\theta_y}{\mu^2 - 4\lambda\nu}\end{aligned}$$

et W prend la forme $\Phi_y - \Psi_x = 0$, de sorte que $\Phi dx + \Psi dy$ est une différentielle exacte $d\chi$. W admet 4 systèmes de caractéristiques: les lignes de longueur nulle, les lignes de courbure des surfaces intégrales; or, quand E_n est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre n , la condition nécessaire et suffisante pour que E_{n-p} soit intégrale intermédiaire est que les caractéristiques d'ordre $(n - 1)$ de E_{n-p} soient caractéristiques d'ordre $(n - 1)$ de E_n . Si donc on cherche les intégrales intermédiaires E_3 de W , les 3 systèmes de caractéristiques de E_3 doivent être: les deux systèmes de longueur nulle et un système de lignes de courbure des surfaces intégrales (du moins, en se bornant à des équations et surfaces réelles) et l'on arrive à prouver qu'il n'y a aucune intégrale intermédiaire d'ordre 3. Pour une intégrale intermédiaire E_2 d'ordre 2, les deux caractéristiques doivent, de même, être les lignes de longueur nulle ou les lignes de courbure des surfaces intégrales: le premier cas conduit à étudier les équations $\theta + M(x, y, z, p, q) = 0$, le second $\frac{\lambda}{\nu} + N(x, y, z, p, q) = 0$; les intégrales cherchées se trouvent ainsi réparties en deux classes bien distinctes. Les calculs devenant longs, l'on se borne au cas, qu'il appelle principal, où χ ne dépend que de x, y, z, p, q et trouve ainsi que le second cas ne donne aucune solution et que le premier donne la solution à cinq constantes arbitraires essentielles

$$\begin{aligned}& [C_0(x^2 + y^2 + z^2) + C_1x + C_2y + C_3z + C_4][(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] \\ & - 2[C_0(px + qy - z) + C_1p + C_2q - C_3 - C_5\sqrt{1 + p^2 + q^2}](1 + p^2 + q^2) = 0.\end{aligned}$$

Le fait remarquable est que se trouvent ainsi rassemblés plusieurs types de solutions trouvés isolément par des considérations géométriques: surfaces minima; surfaces à courbure moyenne constante; surfaces obtenues par représentation conforme sur l'espace euclidien des surfaces minima de l'espace non euclidien à courbure constante ou encore des surfaces à courbure moyenne constante de ce même espace non euclidien. Pour une intégrale intermédiaire E_1 , les caractéristiques doivent être lignes de courbure d'un système des surfaces intégrales et, en se bornant toujours au cas principal, l'on trouve l'équation à 6 constantes arbitraires

$$\begin{aligned}& \left[\frac{C_1}{2}(-x^2 + y^2 + z^2) - C_2xy + C_0xz - C_5x + \frac{C_1C_4 - C_2C_3}{C_0}y + C_3z + \frac{C_1C_6 - C_3C_5}{C_0} \right] p \\ & + \left[\frac{C_2}{2}(x^2 - y^2 - z^2) - C_1xy + C_0yz - C_5y + \frac{C_3C_3 - C_1C_4}{C_0}x + C_4z + \frac{C_2C_6 - C_4C_5}{C_0} \right] q \\ & + \frac{C_0}{2}(x^2 + y^2 - z^2) + C_1xz + C_2yz + C_3x + C_4y + C_5z + C_6 = 0\end{aligned}$$

et, comme cas particuliers, cette équation fournit les cylindres, les cones, les surfaces de rotation et des surfaces à lignes de courbure planes dans un système. L'on a su dominer les calculs et les mener à bonne fin dans le cas dit principal. — L'intégrale générale de W ferait intervenir 4 fonctions arbitraires d'un argument et les résultats de l'on ne nous donnent que des solutions avec deux fonctions au lieu de quatre. A priori, rien ne s'opposerait peut-être à l'obtention de surfaces réelles au moyen de surfaces imaginaires solutions d'une équation E_2 dont les caractéristiques seraient: une série de lignes de longueur nulle et une série de lignes de courbure des surfaces intégrales; les surfaces réelles seraient l'enveloppe d'une famille à un paramètre de telles surfaces imaginaires. — Une autre méthode pour obtenir des surfaces isothermiques est de joindre à W une autre équation aux dérivées partielles compatible avec elle:

par exemple imposer que les images de Gauß des lignes de courbure tracent sur la sphère un réseau isotherme.

B. Gambier (Paris).

Ilensa, Georges: Étude de certains systèmes triples orthogonaux. Bull. Sci. math., II. s. 65, 225—250 (1941).

L'au. s'est proposé de retrouver, par une méthode autre que celle de Darboux, les propriétés de la famille de Lamé (dite *LD*) définie par l'équation $u(x, y, z) = C$, où u est solution de l'équation

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} [(x^2 + y^2 + z^2)\varphi(u) + x\varphi_1(u) + y\varphi_2(u) + z\varphi_3(u) + \varphi_4(u)] = 1,$$

où les φ_i sont des fonctions données de u : écrivons en abrégé $\text{grad } u S(u) = 1$, de sorte que $S(u) = 0$ représente une sphère variable avec u . L'au. part d'une famille arbitraire de sphères $S(u)$, dites sphères génératrices, et d'une surface arbitraire Σ_{u_0} ; sur chaque cercle Γ_0 orthogonal à Σ_{u_0} et $S(u_0)$, il porte, à partir de Σ_{u_0} , une pseudo-longueur constante $\varphi(u_0) du_0$, au sens de Lobatchevsky-Poincaré, $S(u_0)$ étant l'absolu, et obtient ainsi la surface $\Sigma_{u_0 + du_0}$; le même processus, pour $\Sigma_{u_0 + du_0}$ et $S(u_0 + du_0)$, ... puis pour Σ_u et $S(u)$... donne successivement une famille de surfaces Σ_u ; l'au. prouve que les courbes C trajectoires orthogonales des surfaces Σ_u donnent, si on associe celles qui rencontrent une même ligne de courbure de Σ_{u_0} , une surface coupant orthogonalement toute surface Σ_u suivant une ligne de courbure et cela prouve que les surfaces Σ_u ainsi obtenues forment une famille de Lamé. Cette méthode a l'avantage de prouver que cette question relève uniquement de la géométrie anallagmatique: on prévoit le cas où les surfaces Σ seront des cyclides de Dupin. Grâce à un principe de passage ingénieux, l'au. montre que si Σ_{u_0} est une sphère (ou une cyclide de Dupin), toutes les surfaces Σ_u sont de même espèce que Σ_{u_0} . Il est donc naturel de chercher la nature précise des familles de Lamé (du type *LD* ou non) constituées uniquement de cyclides de Dupin; on sait qu'un cercle à un paramètre de l'espace à 3 dimensions n'a pas, en général, d'enveloppe: s'il en a une, il y a, en général, un seul point limite, mais le cas qui va intervenir est celui de deux points limites. Une cyclide de Dupin a deux cercles focaux, conjugués, passant chacun par deux points doubles de la cyclide: la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de cyclides de Dupin Σ_u soit famille de Lamé est qu'un des cercles focaux de Σ_u admette, pour points limites, les deux points doubles de Σ_u qu'il porte (et alors l'autre cercle focal donne la même propriété). Mais alors, la famille de Lamé obtenue est-elle *LD* ou non? Pour qu'elle soit *LD*, il faut et suffit que sur chaque cercle de courbure γ de Σ_u il y ait deux points où les cercles osculateurs aux courbes C définies plus haut soient de rayon nul et tracés sur la sphère σ coupant Σ_u orthogonalement suivant γ . [Malgré l'élégance intrinsèque de l'exposé, il est permis de regretter diverses incorrections de langage ou omissions de propriétés géométriques: ainsi l'au. a dit que les cercles osculateurs cités à l'instant doivent être des ombilics de la sphère σ : nous avons rétabli l'énoncé exact; de même, plus haut, l'au. a oublié de faire remarquer que, pour toute famille (de Lamé ou non) de surfaces à un paramètre, $u = \text{const}$, les courbes C trajectoires orthogonales de ces surfaces ont leur plan osculateur normal à la courbe $u = \text{const}$, $\text{grad } u = \text{const}$ qui passe au pied de C sur la surface.] L'au. donne ensuite des précisions sur les systèmes triples formés de deux ou trois familles de cyclides de Dupin, insistant sur le cas spécial où la sphère S_u est indépendante de u , de sorte que l'on a une famille *LR* (au lieu de *LD*, pour rappeler Ribaucour qui l'a découverte) où les surfaces se déduisent de l'une d'entre elles par un parallélisme anallagmatique continu. Enfin l'au. termine ce bel exposé par un paragraphe inspiré par l'éminent géomètre Bouligand dont nous nous contentons de recopier la suggestion: «Soient donnés deux systèmes de sphères génératrices S_u et S_v tel qu'il leur corresponde deux familles *LD* de surfaces Σ_u, Σ_v appartenant à un même système triple orthogonal. Ce dernier est complètement déterminé si l'on

donne une courbe $\gamma(u_0, v_0)$, intersection de deux surfaces Σ_{u_0} et Σ_{v_0} , avec l'ensemble des éléments de contact de l'une de ces surfaces le long de γ_0 (ensemble que détermine un élément de contact initial).» Contrairement à ce que pensent beaucoup d'augures, ce n'est pas une raison d'épuisement, pour un sujet, de remonter à 70 ou 80 ans et nous félicitons M. Llensa des méthodes inédites et élégantes qu'il nous a offertes.

B. Gambier (Paris).

Salini, Ugo: Osservazioni sulle normali ad una superficie di uno spazio a quattro dimensioni. Atti Accad. Peloritana Messina 41, 52—54 (1939).

Verf. betrachtet eine Fläche des S_4 , die ein doppelt konjugiertes und orthogonales Kurvensystem trägt, derart, daß in jedem ihrer Punkte zwei Guichardsche Normalen und die entsprechenden Krümmungsradien existieren. Verf. stellt dann fest, daß die Berechnung der Krümmungsradien aus den Gleichungen der Fläche mittels Quadraturen vollzogen werden kann, während jede homogene Funktion der isotropen Krümmungen (nach P. Calapso) in endlicher Weise ausdrückbar ist. P. Buzano (Torino).

Zito, Ciro: Reti di Voss a curvatura nulla di un S_4 euclideo. Atti Accad. Peloritana Messina 41, 44—47 (1939).

Calapso (dies. Zbl. 20, 255) hat die Vossschen, d. h. die aus geodätischen Linien bestehenden konjugierten Netze des R_4 bestimmt. Schließt man die Flächen mit einer einzigen Schar von Minimalkurven und die Achsenflächen (d. s. solche mit unendlich vielen Vossschen Netzen) aus, so unterscheiden sich diese Flächen in allgemeine und spezielle, je nachdem der Kommerellsche Kegelschnitt eines Flächenpunktes durch keinen oder wenigstens einen absoluten Kreispunkt geht. Verf. bestimmt nun die Vossschen Netze mit der Gaußschen Krümmung Null und beweist, daß diese zu den allgemeinen Netzen gehören müssen und dadurch gekennzeichnet sind, daß sie zugleich orthogonal sind; der Kommerellsche Kegelschnitt zerfällt dann in ein Paar senkrechter Geraden, und daher stehen bei den untersuchten Flächen sowohl die Haupttangentialen als auch die Haupttangentialenräume jedes Punktes aufeinander senkrecht.

Harald Geppert (Berlin).

Salini, Ugo: Trasformazioni delle reti di Voss. Atti Accad. Peloritana Messina 41, 141—148 (1939).

Calapso (dies. Zbl. 20, 255; vgl. auch vorstehendes Referat) hat die Bestimmung der Fundamentalgrößen 1. Ordnung eines allgemeinen Vossschen Netzes F des R_4 auf die Integration des Differentialsystems $(1) \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \tau, \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} = \sin \tau \cos \omega$ zwischen dem Maschenwinkel ω und dem Winkel τ der Asymptoten des Kommerellschen Kegelschnittes bei Benutzung der Netzkurven als Parameterlinien u, v zurückgeführt. Die Festlegung der Fläche F erfordert aber weiterhin die Angabe der Fundamentalgrößen 2. Ordnung; diese gelingt Verf. dadurch, daß er in der Normalebene eines Flächenpunktes ein Paar zueinander orthogonaler Normalen, nämlich die Winkelhalbierenden der Asymptoten des Kommerellschen Kegelschnittes, einführt. Die gefundenen Ausdrücke benutzt Verf. zu einem neuen Beweis der schon von Calapso entdeckten Tatsache, daß durch Vertauschung von ω und τ [die ja (1) invariant läßt] aus F das reziproke Netz F' entsteht; F und F' stehen in der Beziehung zueinander, daß die Netztangenten des einen parallel den Asymptoten des Kommerellschen Kegelschnittes des anderen sind.

Harald Geppert (Berlin).

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Maeda, Jusaku: A characteristic property of space curves of constant first affine curvature. Tôhoku Math. J. 48, 148—151 (1941).

Verf. untersucht die Regelfläche, die von den Winternitzschen affinen Binormalen einer Raumkurve erzeugt wird, und beweist den Satz: Für die Raumkurven mit konstanter, von Null verschiedener Affin-Krümmung ist kennzeichnend, daß sie mit einer Flecnodal-Kurve ihrer Binormalenfläche zusammenfallen.

W. Haack.

Santaló, L. A.: Quelques propriétés des courbes gauches dans la géométrie différentielle affine. Portugaliae Math. 3, 63—68 (1942).

$\gamma(s)$ sei eine auf die Affinlänge s bezogene Raumkurve C mit der affinen Krümmung bzw. Windung k bzw. t . Durch jeden Punkt derselben wird eine Richtung $e(s)$ gelegt: so entsteht eine Regelfläche F , die zur Torse wird, wenn $(\gamma', e, e') = 0$ ist. Liegt e immer in der affinen rektifizierenden Ebene, so lautet diese Torse F : $\eta = \gamma + \lambda(k\gamma' + \gamma'')$ und wird gerade für die Gewindekurven ($k' = t$) zum Zylinder; liegt e stets in der affinen Normalebene, so bestimmt sich F durch eine Riccatische Gleichung und wird speziell für $t = 0$ zum Zylinder; liegt schließlich e in der Schmiegenebene, so wird F zur Tangentenfläche von C . Soll e starr mit dem beweglichen Dreibein $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ längs C verbunden sein und eine Torse erzeugen, so muß $k = \text{konst.}$ sein: ist auch noch $t = \text{konst.}$, so wird F zum Zylinder. Auch die jeweiligen Bedingungen dafür, daß F zum Kegel wird, werden abgeleitet. *Harald Geppert* (Berlin).

Strubecker, Karl: Differentialgeometrie des isotropen Raumes. 1. Theorie der Raumkurven. S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa 150, 1—53 (1941).

Sind $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ rechtwinklige homogene Koordinaten eines quaternären Gebietes, so gestattet das „absolute“ Geradenpaar $x_0 = 0, x_1 + ix_2 = 0; x_0 = 0, x_1 - ix_2 = 0; i^2 = -1$ eine achtegliedrige Gruppe G_8 kollinearer Automorphismen, die als die Ähnlichkeiten des isotropen Raumes I_3 bezeichnet werden. G_8 enthält die siebengliedrige Untergruppe G_7 der modularen Bewegungen des isotropen Raumes, die man durch Einbettung des I_3 in einen euklidischen vierdimensionalen Raum R_4 aus der Gruppe G_{10} der Bewegungen des R_4 induzieren kann. Bei dieser Einbettung erscheint der I_3 als Tangentialraum der uneigentlichen quadratischen absoluten Maßfläche des R_4 (womit auch der Anschluß an die übliche Terminologie isotroper Gebilde, wie sie sich in der analytischen und differentiellen Imaginärgeometrie herausgebildet hat, erreicht ist). Es sei jedoch ausdrücklich bemerkt, daß Verf. die Theorie des isotropen Raumes unabhängig von der Einbettung als innere Geometrie dieses Raumes entwickelt und gerade auf diese Weise die sachgemäße methodische Vereinfachung (und dazu auch noch die Möglichkeit einer reellen Interpretation) erzielt, der die überraschende Fülle von Resultaten dieser Untersuchung zu verdanken ist. Die G_7 der modularen Bewegungen des I_3 enthält die invariante sechsgliedrige Untergruppe G_6 der unimodularen Bewegungen des I_3 , deren Transformationen nicht nur dessen (singuläre) metrische Fundamentalform, sondern auch seine Rauminhalte unverändert lassen. Diese Bewegungen nennt Verf. isotrope Bewegungen des I_3 schlechthin und entwickelt die Theorie des I_3 als Invariantentheorie dieser G_6 auf Grund der Darstellung $\bar{x} = a + \cos \varphi \cdot x - \sin \varphi \cdot y, \bar{y} = b + \sin \varphi \cdot x + \cos \varphi \cdot y, \bar{z} = c + c_1 x + c_2 y + z$. Damit ergibt sich bereits der grundlegende Satz: eine Bewegung des isotropen Raumes äußert sich im Grundriß $z = 0$ als gewöhnliche ebene euklidische Bewegung. Für die Metrik des I_3 wählt Verf. die kanonische Form $g_{11} = 1, g_{22} = 1, g_{33} = 0, g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0; ds^2 = dx^2 + dy^2 + 0 \cdot dz^2$. Sie ist offensichtlich vom Rang 2, der Tensor g_{ik} in der Terminologie von R. Weitzenböck also einfach singulär. Dann erscheint der Abstand d zweier nichtparalleler Punkte in I_3 durch die Invariante $d^2 = (x^* - x)^2 + (y^* - y)^2$ bestimmt, der Abstand zweier paralleler Punkte dagegen (wegen $d = 0$) rational durch die „Spanne“ $s = z^* - z$. Dem entspricht dual der Winkel $\vartheta = (u^* - u)^2 + (v^* - v)^2$ zweier nichtparalleler nichtisotroper Ebenen und der (rationale!) Parallelabstand $\sigma = w^* - w$ zweier paralleler, nichtisotroper Ebenen. d kann als gewöhnlicher Abstand der Grundrisse gedeutet werden, ähnlich verhält es sich mit ϑ . Der Winkel κ nichtparalleler, isotroper Ebenen wird durch den Logarithmus eines Doppelverhältnisses definiert, analog der Abstand k zweier nichtparalleler Fernpunkte. Die Entfernung λ zweier paralleler isotroper Ebenen stimmt mit ihrem gewöhnlichen euklidischen Normalabstand überein, die „Sperrung“ (Öffnung) zweier paralleler Fernpunkte mit der Spanne der Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden zum Ursprung mit dem Einheitszylinder $x^2 + y^2 = 1$. Eine isotrope Ebene durch die

nichtisotrope Gerade g schneidet eine nichtisotrope Ebene ϱ in der nichtisotropen Geraden h . Die Sperrung der Geraden g und h wird als „Böschung“ oder „Neigung“ der Geraden g gegen die Ebene ϱ bezeichnet. Metrisch dual zu einer Böschungstorse ist also im isotropen Raume eine Kurve auf einem Drehzylinder mit vollisotroper Achsenrichtung. Ferner gilt: die Differentialgeometrie einer ebenen Kurve ist im Falle einer eigentlichen und nichtisotropen Kurvenebene mit der euklidischen Differentialgeometrie des Kurvengrundrisses identisch. In der isotropen Ebene $y = 0$ induziert die G_6 die dreigliedrige Grenzgruppe G_3 im Sinne von H. Beck: $\bar{x} = a + x$, $\bar{z} = c + c_1 x + y$. Diese G_3 reguliert (in bekannter Weise) die bereits von E. Study, L. Berwald und H. Beck entwickelte Geometrie in der isotropen Ebene. — Kreise des isotropen Raumes heißen Kegelschnitte, die die beiden absoluten Geraden schneiden, Kugeln reguläre Flächen zweiter Ordnung, welche diese beiden Geraden enthalten. Fernkreise und Drehzylinder sind metrisch dual. — Die Bewegungsgruppe G_6 des isotropen Raumes enthält sieben eingliedrige Bewegungsgruppen, d. h. sieben Bewegungstypen: (I) Schraubungen, (II) Drehungen, (III) Parabolische Drehungen, (IV) Windschiefe Schiebungen, (V) Allgemeine Translationen, (VI) Isotrope Grenzdrehungen, (VII) Vollisotrope Translationen. Die Typen (III) bis (VII) entstammen der fünfgliedrigen invarianten Untergruppe G_5 der G_6 , der sogenannten Grenzgruppe, die als das kommutative Produkt der dreigliedrigen Links- bzw. Rechtsschiebungsgruppe S_3^l bzw. S_3^r aufzufassen ist: $G_5 = S_3^l \cdot S_3^r = S_3^r \cdot S_3^l$ in Analogie (und als Grenzfall) zu den Gruppen der Clifford'schen Schiebungen des elliptischen Raumes. — Gegenüber G_6 besitzt eine allgemeine Raumkurve $\chi(t)$ in I_3 die folgenden drei Differentialinvarianten niedrigster Ordnung:

$$J_1 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt^2, \quad J_2 = (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) dt^3, \quad J_3 = (\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) dt^3.$$

Dann gilt: der Bogen s einer Kurve des isotropen Raumes ist gleich dem euklidischen Bogen ihres Grundrisses; ihre Krümmung κ ist gleich der elementaren euklidischen Krümmung ihres Grundrisses. Ergänzt man Tangente (χ') und Hauptnormale (χ'') (nach entsprechender Normierung $= t, h$) durch den konstanten vollisotropen Binormalenvektor $b = \{0, 0, 1\}$ von der Spanne 1, so ergeben sich in I_3 die Frenetschen Formeln $t' = \kappa h$, $h' = -\kappa t + \tau b$, $b' = 0$. Durch die Krümmung κ und die Torsion τ ist auch in I_3 eine Kurve bis auf Bewegungen der G_6 festgelegt. Insbesondere sind die Kurven in nichtisotropen Ebenen durch $\kappa \neq 0$, $\tau \equiv 0$ charakterisiert; $\kappa \equiv \tau \equiv 0$ kennzeichnet die Kurven in isotropen Ebenen. Kurven mit festem $\kappa = \kappa_0 \neq 0$ und $\tau = \tau_0 \neq 0$ sind Schraubenlinien in I_3 . Kurven mit konstantem Quotienten $\frac{\tau}{\kappa} = \gamma_0$

sind Böschungslinien in I_3 . Die Grundrisse Bertrandscher Kurvenpaare des I_3 sind Evolventen derselben Evolute; ihre korrespondierenden Tangenten haben konstante Sperrung; ihre Krümmung und Windung genügen einer linearen Relation mit konstanten Koeffizienten; sie ergeben sich aus der Bestimmung aller Kurven des I_3 mit konstanter Torsion. — In einem weiteren Abschnitt entwickelt Verf. die Theorie von Schmiegleis und Schmiegleis der Kurven in I_3 . Für sphärische Kurven in I_3 ist ein konstanter Parameter der Schmiegleis charakteristisch. Die Theorie der Kurven konstanter Torsion $\tau = \pm 1$, führt auf bemerkenswerte Analogien zur Kurventheorie des elliptischen Raumes (der Krümmung 1) und des quasielliptischen Raumes. Auch die Theorie der Darboux'schen Drehungen der Kurven in I_3 und des Drehungsbivektors wird eingehend behandelt.

M. Pinl (Augsburg).

Strubecker, Karl: Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören. Anz. Akad. Wiss. Wien 1941, 90—94.

Nach einem zusammenfassenden Überblick über die verschiedenen Untersuchungen der Flächen Φ , deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören, gibt Verf. folgenden Satz an: Die Flächen Φ fallen entweder mit den Flächen Φ_1 der Absolutkrümmung Null des elliptischen Raumes oder mit den analogen Flächen Φ_2 des quasielliptischen Raumes oder mit den Flächen Φ_3 fester Relativkrümmung des isotropen Raumes [vgl. Strubecker, Differentialgeometrie des isotropen Raumes II.,

Math. Z. 47, 743—777 (1942)] zusammen. Die dadurch in einen umfassenden Zusammenhang gestellten Flächen Φ_1, Φ_2, Φ_3 gestatten eine gemeinsame kinematische Erzeugung mittels der Cliffordschen Schiebungen der drei Räume. *W. Haack.*

Calapso, Riccardo: *Sulle superficie sviluppabili.* Atti Accad. Peloritana Messina 41, 27—31 (1939).

Verf. bemerkt, daß die von C. Guichard aufgestellte, sich auf die Combescuresche Verwandtschaft stützende Konstruktion der Torsen, die eine gegebene Kurve Γ im euklidischen R_n enthalten [vgl. Guichard, *Les courbes de l'espace à n dimensions*; Mém. Sci. math. 29 (1928)] sich als metrischer Sonderfall derjenigen projektiven Konstruktion erhalten läßt, die E. Bompiani für die Kurven des projektiven S_n aufgezeigt hat (vgl. Bompiani, *Sulle curve sghembe* [Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 1936, 515—552, insbes. 537; dies. Zbl. 16, 75]). [Ist $x^i(t)$ die Parameterdarstellung von Γ , so beschreibt der Punkt $X^i(t) = \int x^i(t) F(t) dt$ die Gratlinie irgend-einer Γ enthaltenden Torse.] A. a. O. wurde von Bompiani der Fall $n = 3$ behandelt; die Erweiterung auf den allgemeinsten Fall ($n \neq 3$) liegt jedoch auf der Hand. Übrigens gibt das Verfahren Bompianis, die geometrische Bedeutung einer Normalisierung der homogenen Koordinaten der Punkte einer Kurve im S_n zu gewinnen [vgl. Bompiani, Ann. Sci. Univ. Jassy 23, 75—105 (1937), insbes. S. 78; dies. Zbl. 15, 403], ohne weiteres auch die oben genannte Konstruktion. *Enea Bortolotti (Firenze).*

Bompiani, Enrico: *Invarianti proiettivi di calotte.* Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 2, 888—895 (1941).

Ein Flächenelement 2. Ordnung mit gegebenem Zentrum O (Kalotte) kann im gewöhnlichen Raum mittels einer Entwicklung $z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots$ gekennzeichnet werden. Verf. betrachtet die Gesamtheit aller Kalotten mit vorgegebenem Zentrum O , die überdies in O die gleiche Tangentialebene besitzen, und bildet sie auf die Punkte eines dreidimensionalen projektiven Raumes R_3 mit den homogenen Koordinaten $(1 : a_{11} : a_{12} : a_{22})$ ab. Die Punkte der Ebene ω , auf der die erste Koordinate verschwindet, sind die Bilder der singulären kegelförmigen Kalotten, die eine projektiv invariante Gesamtheit bilden. Eine andere invariante Gesamtheit wird von den parabolischen Kalotten gebildet, die sich im R_3 auf die Punkte eines quadratischen Kegels T mit der Gleichung $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ abbilden, dessen Scheitelpunkt nicht zu ω gehört und die zum Zentrum O und der Berührungsebene $z = 0$ gehörende Flachpunktkalotte abbildet. Die Ebene ω und der Kegel T bilden bezüglich der Projektivitäten ein absolutes Gebilde für die in O sich berührenden Kalotten. Zwei Kalotten dieses Systems besitzen zwei schon von Mascacchi (dies. Zbl. 8, 274) betrachtete projektive Invarianten; in der Tat braucht man sie bloß auf zwei Punkte des R_3 abzubilden und auf die Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden mit T und mit ω zurückzugreifen; wenn diese Gerade T berührt, so fallen die beiden genannten Invarianten zusammen. Verf. gibt neue projektive und metrische Bedeutungen dieser Invarianten an, von denen eine im euklidischen Fall mit der Mehrkeschen Invarianten zusammenfällt. Die Ergebnisse werden dann auf die Kalotten zweiter Ordnung von Hyperflächen in einem projektiven Hyperraum ausgedehnt und führen im euklidischen Falle zu dem schon vom Ref. (dies. Zbl. 9, 415) betrachteten Analogon der Mehrkeschen Invarianten. *P. Buzano (Torino).*

Bompiani, E.: *Invarianti proiettivi e topologici di calotte di superficie e di iper-superficie tangenti in un punto.* Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. 2, 261—291 (1941).

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teil werden die Verfahren entwickelt, die zur Ableitung der projektiven Ergebnisse erforderlich sind, die Verf. schon in einer vorangehenden Arbeit zusammengestellt hat [Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 2, 888 bis 895 (1941)]. Im zweiten Teil beginnt Verf. das Studium der sich in einem Punkt O berührenden Flächenkalotten zweiten Grades des gewöhnlichen Raumes bezüglich der in O regulären Punkttransformationen (topologische Eigenschaften). Die ∞^3 sich in O berührenden Kalotten werden auf die Punkte eines R_3 abgebildet, dann entsprechen

den oben genannten Punkttransformationen projektive Transformationen einer G_7 mit einer invarianten Ebene ω , in der ein nicht zerfallender, invarianter Kegelschnitt Γ liegt; die Punkte von ω bilden die irregulären Kalotten und diejenigen von Γ die parabolischen, irregulären Kalotten ab. Die schon im projektiven Gebiet studierten Begriffe des Kalottenbüschels und Kalottennetzes haben in Wirklichkeit topologischen Charakter. Drei Kalotten eines Büschels besitzen eine Invariante; sie wird im R_3 als das Doppelverhältnis der drei Bildpunkte und des Schnittpunktes ihrer Verbindungsgeraden mit ω gedeutet. Drei Kalotten eines Netzes besitzen zwei Invarianten; sie werden im R_3 gegeben durch zwei der Doppelverhältnisse der drei Bildpunkte und der zwei Schnittpunkte der durch sie bestimmten Ebene mit Γ , wobei diese Doppelverhältnisse auf dem durch die genannten fünf Punkte gehenden Kegelschnitt zu nehmen sind. In den beiden Fällen bestimmt Verf. ein besonders einfaches Modell der betrachteten Konfigurationen, das eine noch unmittelbarere Deutung der Invarianten zuläßt. Die Begriffe werden dann auf Kalotten zweiter Ordnung von Hyperflächen V_n des S_{n+1} , die sich in einem Punkte O berühren, ausgedehnt. *P. Buzano* (Torino).

Su, Buchin: A note on the projective differential geometry of a non-holonomic surface. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 20, 213—220 (1941).

L'A. continua lo studio delle superficie anolonomiche V_3^2 in S_3 proiettivo (che si ottengono associando ad ogni punto di S_3 un piano per esso). — Considerate le sezioni piane per un punto e per una tangente t generica si determinano a) le sezioni iperosculate delle loro coniche osculatrici (tre), b) il luogo delle normali proiettive a queste sezioni (cono del 4° ordine avente t per retta tripla), c) il luogo delle rette dei flessi delle loro cubiche penosculanti (superficie di 8° ordine con t retta sestupla).

E. Bompiani (Roma).

Buzano, Piero: Varietà a tre dimensioni integrali di un sistema di equazioni a derivate parziali lineari e omogenee. *Mem. Accad. Sci. Torino*, II. s. 69, Pt 1, 245—265 (1939).

In den Riemannschen Geometrien höherer Gattung (vgl. Bompiani, dies. Zbl. 11, 418) treten Integralmannigfaltigkeiten V_k gewisser linearer homogener Systeme partieller Differentialgleichungen auf, die für $k=2$ schon von Bompiani untersucht worden sind. Für $k=3$ treten Integralmannigfaltigkeiten V_3 eines linearen homogenen Systems partieller Differentialgleichungen der Ordnung $\leq \nu$ auf, bei denen die Dimension des Schmiegrumes ν -ter Ordnung $\leq 2\nu+3$ ist. — Verf. stellt zunächst einmal einen Satz auf (vgl. dies. Zbl. 20, 71), der diese V_3 in verschiedene Gruppen einzuteilen gestattet. Hiernach sind die wichtigsten Fälle die folgenden: 1) Das System besteht aus drei Gleichungen zweiter Ordnung, aus denen man genau acht Folgerungen dritter Ordnung ziehen kann. 2) Das System besteht aus drei Gleichungen zweiter Ordnung, aus denen man sieben Folgerungen dritter Ordnung ableiten kann und möglicherweise einer weiteren Gleichung dritter Ordnung. Verf. untersucht das System des ersten Falles (bezüglich des zweiten Falles vgl. U. Levi, dies. Zbl. 7, 210 und 11, 81). Verf. beweist, daß dieses System vier projektiv verschiedene Typen besitzen kann, gibt für jeden Typ eine kanonische Form für die Ableitungen zweiter Ordnung enthaltenden Glieder an und bestimmt die entsprechenden geometrischen Eigentümlichkeiten der Integralmannigfaltigkeiten V_3 . Es sind die folgenden: 1. Typus: In jeder Integral- V_3 existieren zwei einfach unendliche Flächensysteme ($u_2 = \text{konst.}$, $u_3 = \text{konst.}$) derart, daß jede Fläche eines der beiden Systeme ein doppelt konjugiertes System von Kurven enthält, dem die auf ihr von den Flächen des anderen Systems ausgeschnittenen Kurven angehören; die Mannigfaltigkeit der Tangentialebenen an die Flächen eines der beiden Systeme, z. B. $u_2 = \text{konst.}$, in Punkten, die einer Fläche des anderen Systems $u_3 = \text{konst.}$ angehören, haben den Charakter von Abwickelbaren, in dem jede ihrer Ebenen einfach inzident mit den unendlich benachbarten Ebenen ist. 2. Typus: Innerhalb jeder Integral- V_3 existiert ein einparametrisches System von Flächen $u_2 = \text{konst.}$, deren jede ein doppelt konjugiertes Kurvensystem (Kurven u_1

und Kurven u_3) enthält und die weiterhin die Besonderheit haben, daß in jedem Punkte der V_3 der Tangentialraum an die V_3 in dem Schmiegungs- S_4 der durch diesen Punkt gehenden Systemfläche enthalten ist (Flächen mit quasiasymptotischem Charakter). Die Kurven eines der beiden obengenannten Systeme, etwa die Kurven u_1 , sind Leitkurven ebenso vieler Regelflächen, deren jede längs ihrer Erzeugenden die Tangentialräume an die V_3 in den Punkten ihrer Leitkurven zu Tangentialräumen besitzt, d. h. die ∞^1 -Tangentialräume an die V_3 längs einer der oben genannten Kurven enthalten jeder eine singuläre Ebene, die ihrerseits eine singuläre Gerade enthält, und bilden daher Mannigfaltigkeiten, die zu gewöhnlichen Torsen analog sind. 3. Typus: Die Integral- V_3 sind Regelmannigfaltigkeiten; die Tangentialräume an V_3 in den Punkten einer Erzeugenden berühren einen Kegel, der aus ∞^1 durch die Erzeugende (Scheitelgerade) gehenden singulären Ebenen, die jenen Räumen angehören, besteht; innerhalb der V_3 existieren zwei einparametrische Flächensysteme $u_1 = \text{konst.}$, $u_2 = \text{konst.}$, die sich in den Erzeugenden (Kurven u_3) schneiden und die Besonderheit haben, daß die Mannigfaltigkeiten, die aus den ∞^2 Tangentialebenen an die Flächen eines der beiden Systeme, z. B. $u_1 = \text{konst.}$, in Punkten, die einer Fläche des anderen Systems $u_2 = \text{konst.}$ angehören, den Charakter von Abwickelbaren haben; die singulären Geraden, die denjenigen Ebenen eines der oben genannten ∞^2 -Systeme angehören, deren Berührungspunkte auf ein und derselben Erzeugenden liegen, bilden einen Kegel, dessen Scheitel ein (charakteristischer) Punkt der Erzeugenden ist. Auf jeder Erzeugenden liegen zwei derartige Scheitelpunkte. 4. Typus: Die Integral- V_3 sind Regelmannigfaltigkeiten und enthalten ∞^2 Quasiasymptoten $\gamma_{1,2}$; die Tangentialräume der V_3 in den Punkten einer Erzeugenden berühren einen Kegel, der aus ∞^1 singulären Ebenen besteht, die jenen Räumen angehören, und durch die Erzeugende (Scheitelgerade) gehen. *Mario Villa.*

Beck, H.: Eine Klasse volumentreuer Transformationen. J. reine angew. Math. 184, 1—11 (1942).

Es handelt sich um volumentreue Transformationen $x \rightarrow x^*$ des R_n in sich, bei denen die Sehnenmitten $m = \frac{1}{2}(x + x^*)$ eine analytische Kurve bilden. Alle diese Transformationen lassen sich integralfrei darstellen und können mit affingeometrischen Mitteln konstruktiv einfach beschrieben werden. Schließlich werden allgemeine volumentreue Transformationen mittels einer Quadratur dargestellt. *O. Borůvka.*

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Ritter, Robert: Stationäre und extreme geometrische Ableitungen in Riemannschen Räumen. Anwendung auf die Flächenverbiegung. 2. Tl. Jber. Dtsch. Math.-Verein. 51, Abt. 1, 193—212 (1941).

In Weiterführung der Untersuchungen des 1. Teils (dies. Zbl. 25, 366) werden die Extremwerte und Extremalrichtungen der geometrischen Ableitungen φ', φ'' einer Ortsfunktion φ auf einer Fläche des R_3 betrachtet. Die Methode der charakteristischen Gleichung führt (unter Beschränkung auf geodätische Linien bei der Bildung der 2. geometrischen Ableitung) auf je zwei Extremwerte und je zwei Extremalrichtungen. Insbesondere nimmt φ'' überall seinen stationären Wert dann und nur dann auf einer geodätischen Linie an — wobei dann auch die Wiederholung der Stationärwertbildung φ' den stationären Wert von φ'' ergibt —, wenn der stationäre Wert von φ' nur von φ abhängt. Diese Voraussetzung ist z. B. erfüllt bei dem Krümmungsmaß K der durch Rotation aus der Parabel $y^2 = 2ax$ entstehenden Fläche. Für diese Fläche werden weiterhin das Linienelement angegeben sowie die Extremwerte von K' und K'' , ferner die natürlichen Gleichungen $\Delta_1 \varrho = 4\varrho^{-1}(\varrho - a)$, $\Delta_2 \varrho = 2\varrho^{-2}(\varrho + a)$ (wobei $\varrho^2 = 1/K$ der Pseudoradius ist). Die Elimination des Parameters a führt zu Beziehungen zwischen den geometrischen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von ϱ in bezug auf die zu den Kurven $\varrho = \text{konst.}$ tangentialen und normalen geodätischen Linien, woraus unmittelbar geometrische Interpretationen folgen. All diese Resultate gelten natürlich für die ganze Klasse der Biegungsflächen des Rotationsparaboloids, insbesondere für $a = 0$

für die Biegungsflächen der Rotationsflächen der Kettenlinienvoluten, die alle zueinander isometrisch sind. *Dobbrack* (Berlin).

Wrona, W.: Eine Verallgemeinerung des Schurschen Satzes. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 943—946 (1941).

Der Hauptsatz dieser Arbeit lautet: Ist in einer V_n die skalare Krümmung einer m -Richtung für ein bestimmtes m in jedem Punkte von der gewählten m -Richtung unabhängig, so ist sie auch unabhängig vom Ort. Es folgt dann weiter, daß für $m < n - 1$ die V_n eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung ist, während für $m = n - 1$ die V_n einsteinsch ist. Dabei wird unter skalarer Krümmung einer m -Richtung in P die erzwungene skalare Krümmung in P einer in V_n eingebetteten V_m , die diese m -Richtung enthält, verstanden. Die skalare Krümmung einer 2-Richtung ist also gleich dem Riemannschen Krümmungsmaß. Für $m = 2$ erhält man den bekannten Satz von Schur. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Botella Raduán, F.: Über die Grundlagen der intrinseken Geometrie eines Riemannschen Raumes und die Eigenschaften des beweglichen Bezugssystems. Rev. mat. hisp.-amer., IV. s. 1, 163—170 (1941) [Spanisch].

L'Autore, riferendosi alla nota trattazione di Cartan sulla ricostruzione geometrica locale della geometria dello spazio di Riemann (É. Cartan: Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann p. 94, Paris 1928), si propone di fare un'analoga trattazione prescindendo dalla nozione di spazio euclideo osculatore, che ha un ruolo fondamentale nell'esposizione del Cartan. — Il lavoro è esposto in forma tutt'altro che soddisfacente e contiene, insieme a molti errori di stampa, inesattezze e concetti non ben precisati; in conseguenza di ciò e di un errore di segno nella formula (7), si ottiene un risultato ($\Gamma_{ijr} = \Gamma_{jri}$) che non sarebbe possibile dedurre dalle ipotesi da cui si parte. La condizione (α) (p. 167) infatti, che in sostanza esprime il teorema di Ricci può benissimo essere compatibile con una connessione euclidea dotata di torsione. *Marzia* (Firenze).

Varga, O.: Bestimmung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen. Mat. fiz. Lap. 48, 423—434 u. dtsh. Zusammenfassung 434—435 (1941) [Ungarisch].

Im Finslerschen Raum mit der Grundfunktion $L(x, dx)$ sei ξ^i ein Vektor im Linienelement (x, \dot{x}) ; das durch Übergang zum Nachbarlement $(x + dx, \dot{x} + d\dot{x})$ entstehende invariante Differential $D\xi^i$ wird dann in der Form

$$D\xi^i = d\xi^i + C_{ki}^i(x, \dot{x})\xi^k d\dot{x}^i + \Gamma_{ki}^i(x, \dot{x})\xi^k dx^i$$

angesetzt, wobei sich nach É. Cartan die Übertragungsparameter C_{ki}^i, Γ_{ki}^i eindeutig aus L durch die Forderung, daß die Übertragung metrisch sein soll, und vier weitere Postulate bestimmen. Statt dessen gibt Verf. einen neuen Weg zur Bestimmung von $D\xi^i$ an. Er besteht darin, daß längs einer stetig differenzierbaren Linienelementfolge $x^i(\tau), \dot{x}^i(\tau)$, $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$ die Finslersche durch eine schmiegende Riemannsche Metrik approximiert wird; das für die letzte Maßbestimmung bekannte invariante Differential wird als invariantes Differential längs der Linienelementfolge erklärt. Man kommt so zum gleichen Ausdruck für die C_{ki}^i, Γ_{ki}^i wie Cartan. — Nach Auszug. *Harald Geppert*.

Varga, O.: Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen. Dtsch. Math. 6, 192—212 (1941).

Ist in einem n -dimensionalen Finslerschen Raume F_n ($n > 2$) eine Hyperfläche F_{n-1} gegeben, so lassen sich bekanntlich in dieser F_{n-1} zwei (allgemein verschiedene) Arten von Übertragungen einführen: eine Übertragung, welche in derselben Weise aus der Metrik von F_{n-1} hergestellt werden kann, wie dies im Falle von F_n geschieht und eine Übertragung, welche man (genau so wie im Falle einer Riemannschen Metrik) mittels einer Projektionsmethode aus der Übertragung von F_n bekommt. Verf. benützt diese letztgenannte Übertragung, um für sie die Krümmungstheorie und Gaußens Theorema egregium abzuleiten. — Zu diesem Zwecke erwähnt er zuerst zusammenfassend die Herstellung der (Cartanschen) Übertragung in F_n und konstruiert dann

nachher durch das Projektionsverfahren die Übertragung in F_{n-1} , für welche er auch die Krümmungs- und Torsionsgrößen (samt den Bianchischen Identitäten) angibt. Die eigentliche Krümmungstheorie der F_{n-1} in bezug auf F_n beruht mehr oder weniger auf dem Begriff der Berwaldschen oskulierenden Indikatrix, woraus man die mittlere Krümmung H und die relative Krümmung S der F_{n-1} in F_n bekommt. Die Integrabilitätsbedingungen der Gaußschen und Weingartenschen Gleichungen führen dann auf die Verallgemeinerung des Theorema egregium für $S - K$, wobei K eine der skalaren Krümmungen (Riemannsche skalare Krümmung) der F_{n-1} ist. — Bem. des Ref.: Es zeigt sich, daß ein geradliniger (nichtlinearer) Komplex als ein Finslerscher Raum F_3 aufgefaßt werden kann, während jede geradlinige Kongruenz in diesem Komplex eine F_2 darstellt. Es wäre empfehlenswert, die oben beschriebene Krümmungstheorie auf diesen Fall anzuwenden. *Hlavatý (Prag).*

Kanitani, Jôyô: Généralisation des directrices de Wilczynski. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 23, 399—409 (1941).

Verf. führt hier eine von ihm im Gedankenkreis Cartans angefangene Untersuchung weiter, die sich auf die Flächentheorie in einem mit einem projektiven Zusammenhang versehenen Raume P_3 , mit Benützung der „tangentialen Bildkurven“ der Flächenkurven bezieht (vgl. É. Cartan, Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective; Paris 1937; S. 258—277; dies. Zbl. 16, 76; J. Kanitani, dies. Zbl. 21, 157, 355; 23, 377; und auch eine Arbeit des Ref.: dies. Zbl. 25, 86). Hier gibt Verf. die Erweiterung zweier Konstruktionen der Wilczynskischen Leitgeraden einer Fläche des gewöhnlichen projektiven S_3 auf die Flächen des P_3 . Es handelt sich um die wohlbekannte, von Wilczynski stammende Konstruktion (vgl. z. B. G. Fubini, E. Čech, Geometria Proiettiva Differenziale 1, 147; Bologna 1926/27) und um eine weitere Konstruktion, die R. Calapso (dies. Zbl. 1, 406) vorgeschlagen hat. Die Erweiterung auf den gegenwärtigen Fall gibt zwei verschiedene Geradenpaare. Die Eigenschaften der beiden Paare und eine weitere, ziemlich einfache Konstruktion des zweiten Paares mit Benützung der „Lieschen Quadriken erster und zweiter Gattung“ (vgl. die dritte der oben zitierten Arbeiten des Verf., S. 352) werden dargelegt.

Enea Bortolotti (Firenze).

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie :

Haupt, Otto: Bemerkung über parabolisch konvexe und konkave Ovale. S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen 72, 216—222 (1941).

Cette note consiste essentiellement dans la transposition en géométrie infinitésimale directe (au sens de Bouligand) de définitions et de résultats dus à Carleman (cf. ce Zbl. 23, 380) et relatifs à la convexité parabolique dans le plan (notion ressortissant de la géométrie différentielle affine). — Les paraboles osculatrices à l'ensemble E du plan G_2 en un point d'accumulation e_0 étant définies comme les limites (éventuellement dégénérées) des suites de paraboles déterminées par quatre points de E convergeant vers e_0 , E est dit paraboliquement convexe (concave) en e_0 s'il existe un voisinage U de e_0 sur E admettant toutes les paraboles P osculatrices à E en e_0 comme paraboles d'appui et en outre, lorsque P est non dégénérée, de manière telle que tous les points de U soient non extérieurs (non intérieurs) à P ; puis est introduite une hypothèse A qui s'énonce ainsi: E admet en chacun de ses points d'accumulation e_0 au moins une parabole osculatrice non dégénérée et les paraboles osculatrices à E en e_0 dégénérées sont des droites doubles (au sens de la théorie projective des coniques). Ceci posé l'A. affirme que: toute courbe simple de Jordan qui est paraboliquement convexe (tout arc convexe qui est paraboliquement concave) en chacun de ses points et satisfait à A , est rencontrée par les paraboles de son plan en quatre points au plus. Un ensemble E étant dit elliptiquement (hyperboliquement) courbe en un de ses points d'accumulation e_0 lorsque toutes les coniques osculatrices à E en e_0 (définies comme les limites des coniques passant par cinq points de E voisins de e_0) sont des ellipses (hyperboles),

nous avons la proposition suivante: sous l'hypothèse A , les arcs convexes qui en chacun de leurs points sont elliptiquement (hyperboliquement) courbes sont identiques aux arcs convexes partout paraboliquement convexes (concaves). Les démonstrations de ces propositions sont réservées pour une publication séparée, ainsi que diverses généralisations consistant dans la substitution aux coniques que jouent dans cette étude le rôle d'instruments de sélection, de courbes appropriées définies respectivement par $2k$ et $2k + 1$ points. Une généralisation en géométrie infinitésimale directe de la proposition de Böhmer sur les ovales: toute ovale dont l'ordre parabolique (au sens de la géométrie finie) local est quatre admet quatre comme ordre parabolique global, ainsi que des propositions connexes de Mohrmann et Mukhopadyaya est envisagée; l'article termine sur une proposition découverte (mais non publiée) par Hjelmslev qui, dans le cas de l'ordre linéaire constitue une réalisation dans le même sens.

Chr. Pauc (Paris).

Pasqualini, Louis: Sur les conditions de convexité d'une variété close V_{p-1} $p-1$ fois étendue de l'espace euclidien. *Mathematica*, Cluj **16**, 102—108 (1940).

L'a. appelle variété close $(p-1)$ fois étendue de l'espace euclidien E_p et désigne par V_{p-1} , un continu borné qui admet en chacun de ses points M un voisinage représenté dans un système d'axes convenables Mx_1, \dots, Mx_p par $x_p = f(x_1, \dots, x_{p-1})$ où f est une fonction continue dont l'argument (x_1, \dots, x_{p-1}) parcourt un intervalle i à $(p-1)$ dimensions; il démontre pour $p=2$ et $p=3$ que: si V_{p-1} est en chacun de ses points localement convexe vers l'extérieur, V_{p-1} est globalement convexe.

Pauc (Paris).

Mirguet, Jean: Sur une classe de surfaces à double courbure continue. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **213**, 201—203 (1941).

Es handelt sich, andeutungsweise gesagt, um eine direkt-geometrische Fassung des Begriffes der Haupttangente (im Sinne der klassischen Flächentheorie), und zwar zunächst bei Flächen F , die einer Lipschitzbedingung genügen (d. h. derel. Paratingent in jedem Punkte unvollständig ist, sog. orthosurfaces) und bei welchen das Paratingent von mindestens dritter Ordnung in jedem Flächenpunkt nur endlich viele Geraden enthält [vgl. über solche Flächen auch Mirguet, *C. R. Acad. Sci.*, Paris **208**, 1218—1220 (1936); dies. Zbl. **15**, 267; ferner. *Bull. Sci. math.*, II. s. **44**, 257—268 (1940)]. — I. Zunächst werden (ohne Beweis) einige Sätze angegeben über die Schnittbogen FH von F mit solchen Halbebenen H , welche begrenzt werden durch eine feste Gerade g , die den Punkt $P \in F$ enthält, aber nicht im Paratingent von F in P enthalten ist. Je nachdem FH in der Nähe seines Anfangspunktes P oberhalb oder unterhalb (genommen in bezug auf eine Orientierung von g) seiner Halbtangente h in P liegt oder keines von beiden der Fall ist, spreche man von einer Ober- h bzw. Unter- h bzw. indifferenten h , kürzer: ind.- h . Existiert in P die Tangentialebene T an F und wird T in P von F geschnitten, so gibt es in T ein Paar von Scheitelwinkeln der Öffnung α mit $0 \leq \alpha < \pi$, innerhalb bzw. außerhalb deren keine Ober- h bzw. keine Unter- h existieren. Höchstens die Begrenzungstrahlen dieser Scheitelwinkel sind ind.- h . Falls $\alpha > 0$, heiße P von doppelter wahrer Krümmung, kurz d. w. K., und die beiden Geraden g', g'' , von welchen die Winkel gebildet werden, heißen d. K.-Limesparatingenten; es sind g', g'' Paratingenten von mindestens 3. Ordnung. — II. Ist E eine Ebene durch g , sog. Vertikalebene, so heiße FE lokal positiv bzw. negativ konkav, je nachdem in E eine Gerade q durch P existiert derart, daß FE in der Nähe von P nicht unterhalb bzw. nicht oberhalb q verläuft; andernfalls heiße FE von der Konkavität Null; ferner wird q als eine Diskriminante des Vorzeichens der Konkavität in P bezeichnet. Lemma: Konvergieren die Punkte $P_v \in F$ gegen $P_0 \in F$ und ist die zu P_v gehörige Vertikalebene E_v parallel zur Vertikalebene E_0 in P_0 , ist ferner das Konkavitätsvorzeichen von E_v entgegengesetzt zu dem von E_0 , so enthält E_0 mindestens eine Paratingente von F in P_0 , welche von höherer als zweiter Ordnung ist. — Daraus folgt: Ein Punkt von F

von d. w. K. ist Limes nur von Punkten d. w. K. und seine d. K. Limesparatingenten sind Limiten der d. K. Limesparatingenten der Nachbarpunkte. Nur die d. K.-Limesparatingenten können Paratingenten von höherer als zweiter Ordnung sein. *Haupt.*

Bol, G.: Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen. Jber. Dtsch. Math.-Vereinig. **51**, Abt. 1, 219—257 (1941).

In der Ebene Euklids besteht zwischen Flächeninhalt F und Umfang L eines Bereichs eine Beziehung $L^2 - 4\pi F \geq 0$. Hier wird für einen Bereich auf einer krummen Fläche bewiesen (1) $L^2 - 4\pi F + \alpha \geq 0$. Dabei geht α auf einer Fläche mit fester Krümmung K über in KF^2 . Das Gleichheitszeichen gilt in (1) für „Entfernungskreise“. Der Beweis benutzt den Gedanken von Th. Kaluza, innere Parallelbereiche zu verwenden. Die Ungleichheit (1) wurde zuerst von Radó und Beckenbach (dies. Zbl. **7**, 130) angegeben. α hat eine einfache „integralgeometrische“ Bedeutung. *Blaschke.*

Reiche, Erhard: Zum isoperimetrischen Problem bei Flächenstücken negativer Krümmung. Dtsch. Math. **6**, 171—177 (1941).

Jedes einfach zusammenhängende, dreimal stetig differenzierbare Flächenstück nichtpositiver Gaußscher Krümmung mit rektifizierbarem Rand läßt sich konform und randisometrisch abbilden auf ein ebenes Flächenstück — das „Planat“ —, das denselben Umfang L und kleinere Oberfläche O hat. Das isoperimetrische Defizit $\Delta = L^2 - 4\pi O$ ist also für das Flächenstück nicht kleiner als für das Planat, insbesondere nicht positiv, und jede der bekannten Ungleichungen für Δ im ebenen Fall läßt sich für das Flächenstück verwenden. Bemerkenswert ist, daß die zugrundegelegte isotherme Darstellung des Flächenstücks im Innern verzweigt sein darf ($E = F = G = 0$) [vgl. Beckenbach-Radó, Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 662—674 (1933); dies. Zbl. **7**, 130]. *Bol* (Greifswald).

Dinghas, Alexander: Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Körper mit Ecken. Math. Z. **47**, 669—675 (1942).

Bol (dies. Zbl. **22**, 267) hat eine Verschärfung der ebenen isoperimetrischen Ungleichung für Bereiche mit vorgegebenen Eckenwinkeln angegeben. Verf. überträgt diese Verschärfung auf den n -dimensionalen Raum; die Schwierigkeit lag in der passenden Übertragung der Begriffe, die Beweismethode folgt der Bolschen. Im R_3 wird so vorgegangen: Ecke p eines konvexen Körpers \mathfrak{R} ist ein Punkt, durch den drei nicht einem Büschel angehörende Stützebenen gehen. Die durch den Mittelpunkt O der Einheitskugel gezogenen Halbparallelen zu allen äußeren Stützebenenormalen in p erfüllen den Normalkegel $\mathfrak{N}(p)$, innerhalb dessen sich ein größter Drehkegel $\mathfrak{G}(p)$ der Öffnung ψ mit dem Scheitel O finden läßt. Polar zu ihm ist nach Verpflanzung zum Scheitel p der kleinste Drehkegel $\mathfrak{S}(p)$, der den aus allen von p nach dem Innern von \mathfrak{R} führenden Strahlen gebildeten abgeschlossenen Projektionskegel enthält. Sind V, O Volumen und Oberfläche von \mathfrak{R} , p_i seine abzählbar vielen Ecken mit den Öffnungswinkeln ψ_i , so gilt

$$36\pi V^2 - O^3 \leq -9\pi V^2 \sum_0^{\psi_i} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für den \mathfrak{R} entsprechenden Kappenkörper der Einheitskugel, der aus dieser durch Aufsetzen der Halbkegel $\mathfrak{S}(p_i)$, die so lange parallel verschoben werden, bis deren Erzeugenden alle die Kugel berühren, entsteht, und seine Homothetischen. Für einen n -dimensionalen \mathfrak{R} ist analog vorzugehen; ist w_v das v -dim. Volumen der v -dim. Einheitskugel, so gilt

$$nw_n \cdot (nV)^{n-1} - O^n \leq -w_{n-1} (nV)^{n-1} \sum_0^{\psi_i} \int \frac{\sin^n x}{\cos^3 x} dx.$$

Harald Geppert (Berlin).

Hadwiger, H.: Flächeninhalte und Kurvenlängen als geometrische Mittelwerte. Jber. Dtsch. Math.-Vereinig. **51**, Abt. 1, 212—218 (1941).

Man kann die mit den Grundformeln der Integralgeometrie verbundenen mengen-

theoretischen Schwierigkeiten durch axiomatische Einführung des Mittelwertbegriffes, allerdings unter Außerachtlassung seines Existenzbeweises, umgehen. Bezeichnet G_x die aus einer ebenen Figur G durch die Bewegung x hervorgehende Figur und ist $F(x)$ eine von G_x abhängige eindeutige reelle Größe, so wird ein Operator (Mittelwert) $\bar{F} = M\{F(x)\}$ als eindeutige reelle Größe erklärt, die bewegungsinvariant, additiv, monoton und durch die Forderung $(F(x) \equiv c = \text{konst.}) \rightarrow (\bar{F} = c)$ normiert sein soll; dabei durchläuft x die ganze Bewegungsgruppe oder eine ihrer Untergruppen. Elementar folgt aus diesen Forderungen, daß der Translationsmittelwert der durch ein Gebiet G mit streckbarer Randkurve und Jordaninhalt f bedeckten Punkte des quadratischen Einheitsgitters gleich f und der Bewegungsmittelwert der Schnittpunktzahl einer aus endlichvielen konvexen Bögen bestehenden Kurve der Länge l mit den Geraden eines Gitters paralleler äquidistanter Geraden vom Abstand 1 gleich $\frac{2}{\pi} l$ ist.

Harald Geppert (Berlin).

Santaló Sors, Luis A.: *Integralgeometrie. 7. Neue Anwendungen des Begriffes des kinematischen Mittels in der Ebene und im Raum.* Rev. Acad. Sci. exact. Madrid **33**, 451—477 u. 481—504 (1936) [Spanisch].

Die Arbeit verfolgt das Ziel, das kinematische Mittel auf die integralgeometrische Untersuchung unbeschränkter ebener und räumlicher Figuren anzuwenden. Beispielsweise wird in der Ebene das Mittel aller Winkel der Öffnung $\alpha \left(\leq \frac{\pi}{2} \right)$, die eine gegebene Eilinie K schneiden, bestimmt; ist K von konstanter Breite Δ , so erhält man $\pi \Delta^2 / \sin \alpha$, ist K eine Strecke der Länge l , so findet sich $\frac{l^2}{2} \{2 + (\pi - 2\alpha) \cotang \alpha\}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei Treffgeraden einer Eilinie konstanter Breite sich unter einem Winkel $\leq \delta \left(\leq \frac{\pi}{2} \right)$ treffen, ist $2\delta/\pi$, und wenn es sich um eine Strecke der Länge l handelt, $\frac{l}{4} \{(\pi - 2\delta) \sin \delta + 4(1 - \cos \delta)\}$. Dann werden Parallelstreifen der Breite Δ untersucht; das Mittel aller parallelen Streifen, die einen gegebenen Punkt enthalten, ist $\pi \Delta$, das aller parallelen Streifen, die eine Strecke der Länge l treffen, ist $2l + \pi \Delta$. Sind eine Eilinie vom Umfang L und n sie schneidende Parallelstreifen der Breiten $\Delta_1 \cdots \Delta_n$ vorgegeben, so berechnet sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein innerer Punkt des Eibereiches zugleich den n Streifen angehört, zu (1) $\pi^n \Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_n / (L + \pi \Delta_1)(L + \pi \Delta_2) \cdots (L + \pi \Delta_n)$. Durch ähnliche Überlegungen ergibt sich auch die Lösung des verallgemeinerten Buffonschen Nadelproblems, bei dem die Abstände zwischen den Gittergeraden nicht fest sind. Im Raume betrachtet Verf. entsprechend Dieder mit spitzem Öffnungswinkel und Schichten zwischen parallelen Ebenen. Z. B. ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei Treffebenen eines Körpers konstanter Breite sich unter einem Winkel $\leq \delta \left(\leq \frac{\pi}{2} \right)$ schneiden, $1 - \cos \delta$. Das Mittel aller Parallelschichten der Breite Δ , die einen festen Punkt enthalten, ist $2\pi \Delta$, die eine Strecke der Länge l treffen, ist $\pi l + 2\pi \Delta$, die einen ebenen Eibereich vom Umfang L treffen, ist $\frac{\pi}{2} L + 2\pi \Delta$. Ähnlich ist (1) auf den Raum zu übertragen, wobei Δ durch 2Δ , und L durch das Integral der mittleren Krümmung zu ersetzen sind. Die Arbeit enthält eine Fülle weiterer spezieller integralgeometrischer Formeln.

Harald Geppert (Berlin).

Blaschke, Wilhelm: *Topologia differenziale o geometria dei tessuti.* Atti Accad. Peloritana Messina **41**, 93—116 (1939).

Verf. faßt für das italienische Leserpublikum einige Gegenstände seines Buches über die Geometrie der Gewebe (dies. Zbl. **20**, 67) zusammen. Wie dieses Buch zerfällt auch die Arbeit in drei Teile. Der erste befaßt sich mit der Definition des sechseckigen Dreigewebes und einer Beweisskizze des Thomsenschen Satzes sowie dem Satz von

Graf und Sauer, der die geradlinigen Sechseckgewebe kennzeichnet, und einigen weiteren Betrachtungen über Gewebe und Gruppen. Weiter wird das Theorem von Mayrhofer und Reidemeister über die topologische Äquivalenz zweier Viergewebe und die damit verbundene Schwierigkeit, einen von einschränkenden Differenzierbarkeitsbedingungen freien Beweis zu geben, besprochen. Es folgen einige Ergebnisse über den gewöhnlichen Raum. Der zweite Teil befaßt sich kurz mit den rechnerischen Behandlungsmethoden der Gewebe mit besonderer Berücksichtigung der Invarianten der Dreigewebe von Kurven in der Ebene. Der dritte Teil betrachtet das Abelsche Theorem und die Beziehungen zur Topologie und algebraischen Geometrie.

P. Buzano (Torino).

Calapso, Riccardo: *Intorno ad un esempio di tessuto esagonale.* Atti Accad. Peloritana Messina **41**, 149—150 (1939).

Das von drei Geradenbüscheln mit nicht in einer Geraden liegenden Zentren gebildete Dreigewebe ist sechseckig, da es topologisch in ein solches, das von drei Büscheln paralleler Geraden gebildet wird, transformierbar ist. Dafür gibt Verf. einen neuen Beweis, wobei er sich auf Projektionen und Schnitte stützt, mit denen er den Schließungssatz für Brianchonsche Sechsecke beweist.

P. Buzano (Torino).

Angewandte Geometrie:

● **Bortolotti, Enea:** *Geometria descrittiva. Lezioni redatte per uso degli studenti.* Padova: Casa edit. A. Milani 1939. 715 pag. e 8 fig. L. 80.—.

Graf, Ulrich: Über das Photo eines Photos. Z. angew. Math. Mech. **21**, 183—189 (1941).

Ein Lichtbild eines räumlichen Gegenstandes werde von einer beliebigen Stelle des Raumes aus in einer beliebigen Aufnahmerichtung photographiert. Es ergibt sich dann die Frage, ob das so gewonnene Bild mit einer unmittelbaren Aufnahme des räumlichen Gegenstandes übereinstimmt. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall. Wird das gegebene Lichtbild festgehalten, so gibt es vielmehr für jede Lage des Aufnahmezentrums im Raum zwei ganz bestimmte Aufnahmerichtungen, für welche das Photo des Photos mit einer unmittelbaren Aufnahme des räumlichen Gegenstandes übereinstimmt. Das eine dieser beiden Bilder gibt eine Wiederholung des gegebenen Lichtbildes, das andere eine neue Aufnahme des räumlichen Gegenstandes. Der Aufnahmeort dieses neuen Bildes ist derselbe wie der des gegebenen Lichtbildes, die Aufnahmerichtung eine andere. Aus einem Photo des gegebenen Lichtbildes, das von einem beliebigen Punkt des Raumes aus in einer beliebigen Aufnahmerichtung hergestellt worden ist, lassen sich die beiden zu diesem Raumpunkt gehörigen und mit unmittelbaren Aufnahmen des räumlichen Gegenstandes übereinstimmenden Bilder durch Umzerren gewinnen.

W. Schmid (Dresden).

Albrecht, Gottfried: Die Fehlerellipse bei trigonometrischen Punkteinschaltungen ohne überschüssige Beobachtungen. Z. Vermessungswes., Stuttgart. **70**, 338—347 (1941).

Les formules données par le Prof. Eggert dans Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, Band II, 1. Halbband, 9. Aufl., 1931, pages 429 et 452, donnent dans des cas simples l'erreur moyenne d'un point. L'auteur indique une méthode géométrique qui permet d'avoir plus rapidement une idée de la précision de la triangulation sans avoir à calculer les axes de l'ellipse d'erreur — au moyen des théorèmes suivants on construit une ellipse E homothétique de l'ellipse d'erreur. Dans le cas du relèvement par mesure de directions, l'ellipse E est tangente au triangle de fermeture au milieu de ses côtés et son centre est confondu avec le centre de gravité de ce triangle. — Dans le cas du relèvement par mesure d'angles l'ellipse E admet comme diamètres conjugués les deux côtés du triangle de fermeture qui sont opposés aux angles mesurés. Dans le cas de l'intersection, ce sont les côtés du triangle de fermeture qui correspondent aux visées d'intersection qui sont des diamètres conjugués de l'ellipse E . Enfin dans le cas de l'intersection latérale, les côtés du triangle qui

correspondent à la visée d'intersection et à celle de relèvement jouent le même rôle. L'auteur donne d'élégantes démonstrations de ces propriétés basées sur la considération de figures affines. *G. Laclavère (Paris).*

Reicheneder, K.: Die Sicherheit einer Punkteinschaltung, ein Beitrag zur Fehlertheorie. Z. Vermessungswes., Stuttg. 70, 386—395 (1941).

Die auf Grund überschüssiger Messungen bei der Punkteinschaltung berechneten mittleren Beobachtungsfehler und Koordinatenfehler geben trotz kleiner Beträge doch nicht die Gewähr dafür, daß nicht noch grobe Fehler im Resultat vorhanden sind. Erst wenn der Nachweis erbracht ist, daß die Richtungsfehler den Gaußschen Gesetzen entsprechen, bestehen die Fehlerangaben zu Recht. Es wird die Frage untersucht, wie weit diese Forderung in einer Ausgleichungsaufgabe erfüllt ist. Da die Punktunsicherheit in der Hauptsache von der geometrischen Konfiguration abhängt, wird zunächst der Einfluß eines groben Fehlers in einer beobachteten Richtung abgeleitet, indem in einer neuen Ausgleichung die Gewichtskoeffizienten $[\alpha]$, ... unter Beibehaltung des mittleren Beobachtungsfehlers, jedoch unter Ausschluß der betrachteten Richtung neu bestimmt und mit den früher unter Berücksichtigung aller Richtungen erhaltenen verglichen werden. Als Definition der Punktsicherheit wird das Verhältnis der linearen Fehler in einer bestimmten Richtung eingeführt. Für jede Richtung ist eine solche Sicherheitsgröße zu berechnen und nun zur Bestimmung der allgemeinen Punktsicherheit eine Kombination dieser Werte zu bilden. Verf. wählt hierzu das arithmetische Mittel und kommt damit zu allgemeinen Beziehungen, die auf verschiedene Beispiele angewendet werden. Verf. kommt zum Schluß zu der Auffassung, daß wegen der unständlichen Berechnung das Verfahren sich nicht in die Praxis einführen dürfte. Da im allgemeinen auch stets mehr als eine Überbestimmung vorhanden sein werden, und bei einer guten Triangulation auch eine gute Verteilung der Bestimmungsstücke über den Horizont vorgesehen ist, werden sich derartige Untersuchungen erübrigen. *Gigas (Berlin-Schlachtensee).*

Laplaza, Santos Anadon: Konforme Abbildung des Drehellipsoides mit Anwendung auf die Karte von Spanien. Rev. mat. hisp.-amer., III. s. 2, 8—43 (1940) [Spanisch].

Die Arbeit ist ein Beitrag zur Lösung der Aufgabe, das Ellipsoid konform auf die Ebene abzubilden. Nach einem geschichtlichen Überblick zeigt Verf. in einfachster Weise, daß „jede kartesiansche rechtwinklige Darstellung irgendeiner holomorphen Funktion der komplexen Veränderlichen $z = q + i \cdot l$ (q = isometrische Breite, l = Länge) eine konforme Karte des Erdellipsoides ist“. Für verschiedene bekannte konforme Karten sind die Funktionen zusammengestellt und ihre kennzeichnenden Merkmale, wie Vergrößerungsverhältnis u. a. m., angegeben. In einer späteren Arbeit sollen die Erkenntnisse auf die Karte von Spanien angewendet werden. *Sutor.*

Topologie:

Linsman: Les involutions topologiques. (Liège, 17.—22. VII. 1939.) C. R. Congr. Sci. Math. 105—109 (1939).

Cette note contient un aperçu sur une conception topologique de la géométrie finie basée sur la notion d'involutions de rang n sur une variété, involutions qui sont l'expression topologique des involutions de la géométrie algébrique; les définitions sont explicitées et les problèmes fondamentaux soulevés. *Pauc (Paris).*

Merz, K., und Pierre Humbert: Einseitige Polyeder nach Boy. Comment. math. helv. 14, 134—140 (1941).

Sowohl im ersten (von K. Merz stammenden) als auch im zweiten (von P. Humbert herrührenden) Teil wird vom Heptaeder ausgehend durch leicht überschaubare, polyedrale Abänderungen ein Modell der projektiven Ebene gewonnen, das im Sinn von Hilbert (vgl. Hilbert-Cohn Vossen, Anschauliche Geometrie. 1932, 280; dies. Zbl. 5, 112) singularitätenfrei ist. Das Modell des 1. Teils ist eine Fläche, die dem

6. Grade entspricht, das Modell des 2. Teils führt auf übersichtlichem Weg zur Gestalt des 2., symmetrischen Boyschen Modells, das in dem zitierten Buche dargelegt ist.

R. Furch (Rostock).

Hirsch, Guy: Topologie. Une propriété des variétés topologiques fibrées. (*Liège*, 17.—22. VII. 1939.) C. R. Congr. Sci. Math. 128—131 (1939).

Betrachtet werden faserungstreu, eindeutig stetige Selbstabbildungen T in 2 Fällen: 1. bei der n -dim. Sphäre mit 0-dim. Sphären als „Fasern“ über dem n -dim. proj. Raum [also antipodentreue Abbildungen der Sphäre auf sich], 2. bei der 3-dim. Sphäre unter Zugrundelegung der eindimensionalen Fasern (s. Seifert, dies. Zbl. 6, 83). — Eine solche Selbstabbildung wird als „lokales topologisches Produkt“ $T = T_1 \times T_2$ aufgefaßt, d. h. als Kombination der zu T gehörigen eindeutig stetigen Selbstabbildung T_1 der Zerlegungsfläche und der Gesamtheit der Abbildungen T_2 je einer Faser auf die durch T bestimmte Bildfaser. Bedeutet $c(R)$ den Grad einer Abbildung R und $l(R)$ die Lefschetzsche Zahl (\pm algebraische Zahl der Fixpunkte) einer Selbstabbildung R , so läßt sich nach Mitteilung des Verf. rein homologiethoretisch zeigen, daß aus $T = T_1 \times T_2$ folgt: $c(T) = c(T_1) \cdot c(T_2)$ und $l(T) = l(T_1) \cdot l(T_2)$, was beides im Fall 1 mod 2 zu reduzieren ist. Diese Formeln sind zu verstehen, wenn man bedenkt, daß alle Faserabbildungen denselben Grad haben und daß ein Fixpunkt von T auch einen solchen von T_1 und einen solchen der zugehörigen Faser bedeutet. *R. Furch*.

Eckmann, Beno: Zur Homotopietheorie gefaserner Räume. Comment. math. helv. 14, 141—192 (1941).

Un recouvrement d'un compactum C par des ensembles fermés A est dit rétractile quand il existe une transformation du voisinage d'ordre r de chaque ensemble A en cet ensemble A , r étant une constante, cette transformation étant l'identité en chaque point de A , étant continue et dépendant continûment de A . (Ces conditions sont assez strictes pour imposer aux divers ensembles A d'appartenir au même type d'homotopie.) Soit C/A le compactum dont chaque point est l'un des ensembles A ; X étant un compactum quelconque, soient C^X et $(C/A)^X$ les espaces constitués respectivement par les transformations continues de X dans C et de X dans C/A . Une transformation $F(x) \in (C/A)^X$ est dite trace d'une transformation $f(x) \in C^X$ lorsque, pour chaque point $x \in X$, l'ensemble A qui est $F(x)$ contient le point de C qui est $f(x)$. Ces définitions posées, l'A. développe les conséquences du lemme que voici: Si un seul point d'un arc continu appartenant à l'espace $(C/A)^X$ est une trace, alors cet arc tout entier est la trace d'un arc appartenant à l'espace C^X . Il en résulte tout d'abord les deux théorèmes suivants: Si une transformation $F(x) \in (C/A)^X$ est homotope à une transformation constante, alors cette transformation $F(x)$ est une trace. Si une transformation $f(x) \in C^X$ possède une trace homotope à une transformation constante, alors $f(x)$ est homotope à une transformation de C dans l'un des ensembles A . — Nous supposons désormais que les ensembles A sont deux à deux disjoints: ils constituent une décomposition $D = C/A$ de C ; la transformation de D^C qui à chaque point de l'ensemble A associe le point A de D sera nommée projection et sera désignée par P . (La trace d'une transformation essentielle est alors une transformation essentielle; en particulier si C est essentiel sur lui-même, P est une transformation essentielle de C sur D .) Soit $\pi_n(E)$ le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie, au sens de Hurewicz, d'un espace E : les éléments de ce groupe sont les composantes de l'espace E^{S^n} , S^n étant la sphère de dimension n ; soit $\varphi_n(D)$ le sous-groupe de $\pi_n(C)$ que constituent celles des composantes de $\pi_n(C)$ qui contiennent des transformations appartenant à A^{S^n} ; soit $\psi_n(D)$ le sous-groupe de $\pi_n(A)$ que constituent les transformations de A^{S^n} qui sont homotopes dans C^{S^n} à des transformations constantes; on a les isomorphismes

$$\pi_n(D)/P\pi_n(C) \approx \pi_{n-1}(D) \quad \text{pour } n \geq 2; \quad P\pi_1(C) = \pi_1(D) \quad \text{si } A \text{ est connexe;}$$

$$P\pi_n(C) \approx \pi_n(C)/\varphi_n(D) \quad \text{et} \quad \varphi_n(D) \approx \pi_n(A)/\psi_n(D) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Si A est homotope à un point dans C , alors

$$\begin{aligned} \pi_n(D) &\approx \pi_n(C) + \pi_{n-1}(A) \quad \text{pour } n \geq 2; \\ \varphi_n(D) &= 0, \quad \psi_n(D) = \pi_n(A), \quad P\pi_n(C) \approx \pi_n(C) \quad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

On nomme section d'une décomposition D toute transformation $j \in C^D$ dont la trace est la transformation identique de D en lui-même; quand il existe une telle section, alors

$$\begin{aligned} \pi_n(C) &\approx \pi_n(D) + \pi_n(A) \quad \text{pour } n \geq 2; \\ \varphi_n(D) &\approx \pi_n(A), \quad \psi_n(D) = 0, \quad P\pi_n(C) = \pi_n(D) \quad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

Plaçons-nous dans le cas où D est homéomorphe à S^m ; nous écrirons D_m au lieu de D ; il intervient une certaine transformation $t \in A^{S^{m-1}}$; $\psi_{n-1}(D_m) = t\pi_{n-1}(S^{m-1})$ pour $n < 2m - 1$ (et aussi pour $n = 2m - 1$, si m est impair); $\psi_{m-1}(D_m)$ est le sous-groupe de $\pi_{m-1}(A)$ qu'engendre t ; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section est que $\psi_{m-1}(D_m) = 0$. — L'A. applique ces théorèmes généraux aux espaces fibrés les plus importants (les fibres étant les éléments de la décomposition rétractile de l'espace). Il établit, outre des résultats précédemment connus, les suivants: existence de représentations essentielles de S^N sur S^n pour $n = 4$ et $N = 8$ ou 10 , pour $n = 8$ et $N = 16, 18$ ou 22 ; une expression des groupes d'homotopie des espaces projectifs réels, complexes et quaternioniens en fonction de ceux des sphères; Γ_n étant le groupe des matrices orthogonales, unimodulaires, à $n + 1$ lignes, les relations $\pi_r(\Gamma_n) \approx \pi_r(\Gamma_{r+1})$ pour $n \geq r + 1$ (en particulier $\pi_2(\Gamma_n) = 0$); A_n étant le groupe des matrices unitaires, unimodulaires, à $n + 1$ lignes, les relations $\pi_{2s+1}(A_n) \approx \pi_{2s+1}(A_s)$ et $\pi_{2s}(A_n) \approx \pi_{2s}(A_s)$ pour $n \geq s > 0$ (en particulier $\pi_1(A_n), \pi_2(A_n)$ et $\pi_4(A_n)$ sont nuls; $\pi_3(A_n)$ et $\pi_5(A_n)$ sont cycliques infinis pour $n \geq 2$). Enfin, en étudiant les champs continus de vecteurs tracés sur les sphères, l'A. établit en particulier les propositions que voici: sur S^5 il n'existe pas de couple de champs de vecteurs tels que les deux vecteurs de ce couple soient linéairement indépendants en chaque point (donc S^5 n'est pas parallélisable); sur S^n , pour $n = 5$ et pour n pair ≥ 4 , il n'existe pas de champ de bivecteurs.

J. Leray (Paris).

Nielsen, Jakob: Ein Satz aus der Topologie der Flächenabbildungen. Norsk mat. Tidsskr. 23, 96—99 (1941) [Dänisch].

Ankündigung eines Satzes, der es erlaubt, bei allen Untersuchungen von Invarianten für Abbildungsklassen endlicher Ordnung sich an periodische Abbildungen als Repräsentanten der Klassen zu halten: „Ist n die Ordnung einer Klasse von orientierungstreu Abbildungen einer zweiseitigen (nicht notwendig geschlossenen) Fläche endlichen Zusammenhangs, so enthält diese Klasse eine periodische Abbildung der n -ten Ordnung.“ Die Ordnung einer Klasse gibt die Minimalpotenz der Klasse an, welche die identische Abbildung enthält.

R. Furch (Rostock).

Kerékjártó, B. de: Sur le caractère topologique du groupe homographique de la sphère. Acta math. 74, 311—341 (1941).

L'objet de ce mémoire est de caractériser topologiquement le groupe des similitudes du plan euclidien et le groupe homographique d'une variable complexe. — Dans un premier chapitre l'A. reproduit sa démonstration du théorème suivant: Tout groupe continu connexe d'ordre 2 est homéomorphe à l'un des quatre groupes que voici: le groupe des paramètres du groupe des similitudes de la droite orientée; le groupe des translations du plan euclidien; le groupe des mouvements d'un cylindre de révolution; le groupe des translations d'un tore en lui-même. (Cette démonstration s'appuie sur le théorème de translation et le théorème du point fixe de Brouwer, ainsi que sur quelques autres propositions de topologie plane.) — Rappelons qu'un groupe est dit doublement transitif quand, étant donnés quatre points A, B, A', B' , il possède une transformation et une seule qui transforme A en A' et B en B' ($A \neq B$ et $A' \neq B'$). L'A. déduit du théorème précédent le suivant: Tout groupe continu, doublement transitif de transformations topologiques d'une surface en elle-même est homéomorphe au groupe des similitudes du plan euclidien. (Il prouve que le sous-groupe des trans-

formations laissant fixe un point contient un sous-groupe cyclique unique; ce sous-groupe cyclique lui permet de définir les cercles, la mesure des arcs, les symétries par rapport à un point. Grâce à ces symétries il construit les homothéties, puis les droites. Il définit la mesure des angles et constate que les postulats d'Euclide sont vérifiés.) — Enfin l'A. déduit aisément du théorème précédent le suivant: Tout groupe continu, triplement transitif de transformations topologiques d'une surface en elle-même est homéomorphe au groupe homographique d'une variable complexe; la surface est nécessairement homéomorphe à une sphère.

J. Leray (Paris).

Morita, Kiiti: H. Hopf's extension theorem in normal spaces. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 23, 161—167 (1941).

Verf. verallgemeinert den bekannten Erweiterungssatz von H. Hopf [für Polyeder s. Alexandroff-Hopf, Topologie 1, 500; dies. Zbl. 13, 79; für Kompakta s. K. Ko-deira, Compositio Math. 7, 177—184 (1939); dies. Zbl. 22, 172] auf $(n+1)$ -dimensionale, bikompakte, normale Räume S , gibt also eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine stetige Abbildung einer abgeschlossenen Teilmenge F eines solchen S in die n -dimensionale Sphäre S^n erweitert werden kann zu einer Abbildung von ganz S in die S^n .

Nöbeling (Erlangen).

Groot, J. de: Sätze über topologische Erweiterung von Abbildungen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 933—938 (1941).

In einem normalen Raum mit abzählbarer Basis seien zwei homöomorphe Mengen A und A' gegeben; außerdem zwei Mengen $B \subset \bar{A} - A$ und $B' \subset \bar{A}' - A'$. Es werden mehrere hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß jede topologische Abbildung von A auf A' erweiterbar ist zu einer topologischen Abbildung von $A + B$ auf $A' + B'$. Eine Anwendung lautet: jede topologische Abbildung der irrationalen Punkte zweier n -dimensionaler Elemente im R_n ($n > 1$) aufeinander ist erweiterbar zu einer Abbildung der Elemente aufeinander (irrational heißt dabei: mindestens eine Koordinate irrational).

Nöbeling (Erlangen).

Odle, John W.: Non-alternating and non-separating transformations modulo a family of sets. Duke math. J. 8, 256—268 (1941).

Die von Whyburn (dies. Zbl. 9, 88; 16, 421; 19, 373), Wardwell (dies. Zbl. 15, 419) usw. öfters untersuchten inneren, nicht-separierenden und nicht-alternierenden Abbildungen werden begrifflich weitergeführt, ihre Beziehung zu verschiedenen Kontinuenklassen, insbesondere zu speziellen Kurvenklassen untersucht und durch eine Reihe von Sätzen beleuchtet.

G. Alexits (Budapest).

Schneckenburger, Edith R.: On 1-bounding monotonic transformations which are equivalent to homeomorphisms. Amer. J. Math. 63, 768—776 (1941).

Eine Abbildung T heißt monoton und 1-berandend (in Zeichen R_0^{01} -Abbildung), wenn für jeden Bildpunkt die 0- und 1-dimensionale Bettizahl der Urbildmenge verschwindet. J. H. Roberts und N. E. Steenrod [Ann. of Math., II. s. 39, 851 bis 862 (1938); dies. Zbl. 19, 372] haben gezeigt, daß das eindeutige, stetige R_0^{01} -Bild einer kompakten 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ohne Rand zu M homöomorph ist. Es wird jetzt vor allem die Frage untersucht, für welche Streckenbilder $A \subset M$ dasselbe gilt. Antwort: 1) ist A zyklisch, so ist A eine einfache geschlossene Kurve; 2) ist A ein Baum, so ist A ein Bogen; 3) liegt weder 1) noch 2) vor und macht man geeignete Voraussetzungen über die Zerlegungspunkte von A , so ist A Summe von endlich oder abzählbar vielen topologischen Kreislinien, die alle durch einen Punkt gehen, aber sonst fremd sind.

Nöbeling (Erlangen).

Wilder, R. L.: Decompositions of compact metric spaces. Amer. J. Math. 63, 691—697 (1941).

Es sei M ein kompakter metrischer Raum und ψ eine lokale topologische Eigenschaft. Wenn ψ im Punkte x von M nicht gilt, heiße x ein ψ -singulärer Punkt von M . Ist Γ eine Klasse kompakter metrischer Räume mit der Eigenschaft, daß, wenn $M \in \Gamma$

und die Menge S der ψ -singulären Punkte von M nichtleer ist, \bar{S} nicht nur einpunktige Komponenten hat, dann nennt Verf. ψ 'expansiv bez. Γ (Beispiel: ψ = lokaler Zusammenhang, Γ = System der Kontinuen). Jeder Punkt von $M - \bar{S}$ und jede Komponente von \bar{S} wird ein ψ -Primteiler genannt. Diese ψ -Primteiler bilden einen metrisierbaren Raum M' derart, daß die Abbildung von M auf M' , die jedem Punkt von M den ihn enthaltenden Primteiler zuordnet, stetig ist. Weiter heißt bekanntlich eine Menge n -lokal zusammenhängend (in Zeichen $n - lc$), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß jeder n -Zyklus $< \delta$ (im Sinne von Vietoris, mit einer endlichen oder kompakten topologischen Koeffizientengruppe) auf einer Menge $< \varepsilon$ berandet; eine Menge heißt lc^n , wenn sie $i - lc$ ist für jedes $i = 0, 1, \dots, n$. Verf. beweist folgende Sätze: 1. Ist ψ expansiv bez. Γ und $M \in \Gamma$, dann hat M' , falls $\in \Gamma$, keine ψ -singulären Punkte. 2. Die Eigenschaft ψ_{n+1} , $(n+1) - lc$ zu sein, ist expansiv bez. der Klasse C_{n+1}^n aller kompakten, metrischen Räume M , die lc^n sind und eine endliche $(n+1)$ -dimensionale Bettische Zahl haben; jeder Punkt aus der Menge S (bez. ψ_{n+1}) eines $M \in C_{n+1}^n$ liegt in einer nicht einpunktigen Komponente von \bar{S} . 3. Ist $M \in C_{n+1}^n$ und sind die ψ_{n+1} -Primteiler einfach i -zusammenhängend (d. h. alle i -Zyklen jedes Primteilers beranden in demselben) für $i = 1, 2, \dots, n$, so ist $M' lc^{n+1}$. Hauptsatz: r und n seien ganz mit $-2 < r < n$. ψ_r^n bedeute: $i - lc$ für $i = r, r+1, \dots, n$. C_r^n sei die Klasse aller kompakten metrischen Räume, die lc^r sind und eine endliche i -dimensionale Bettische Zahl haben für $r < i \leq n$. Dann ist ψ_{r+1}^n expansiv bez. C_r^n . Ist $M \in C_r^n$ und sind die ψ_{r+1}^n -Primteiler einfach i -zusammenhängend für $i = 1, 2, \dots, n-1$, dann ist $M' lc^n$. — Es folgen noch einige Anwendungen.

Nöbeling (Erlangen).

Rey Pastor, J.: D_0 -Räume. Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat. 1, 105—122 (1940) [Spanisch].

Verf. führt in einem abstrakten Raum den verallgemeinerten Begriff der unsymmetrischen orientierten Entfernung zweier Punkte als reelle Funktion des geordneten Punktepaares x, y ein, die folgenden drei Postulaten genügt: 1) $xy \geq 0$, 2) $xx = 0$, 3) $xz \leq xy + yz$, aber nicht mehr die Forderungen 4) $(xy = 0) \rightarrow (x = y)$, 5) $xy = yx$ erfüllt. So entsteht ein D_0 -Raum. Die Unsymmetrie zieht zwei Arten von Häufungspunkten und demnach zwei Möglichkeiten des Abschließens einer Menge nach sich; die so entstehenden Räume werden als D_0^1 und D_0^2 unterschieden. Dann sind die ersten beiden Rieszschen Postulate erfüllt; die zweite Abschließung einer Menge fällt mit der ersten zusammen; hingegen stören im weiteren der 1. und 2. Kern der Punkte a , d. s. die Punkte x mit $xa = 0$ bzw. $ax = 0$. Als Abstand eines festen Punktes p von einer Menge X wird definiert $pX = \inf_{x \in X} px$, er verschwindet genau dann, wenn p der einen abgeschlossenen Hülle $[X]$ von X angehört; hingegen definiert man als Abstand der Menge X von p den Ausdruck $Xp = \sup_{x \in X} xp$ und als orientierten Abstand der Mengen X, Y den Ausdruck $XY = \sup_{x \in X} xY$; der letzte verschwindet genau dann, wenn X der einen Hülle $[Y]$ angehört. Dieser Entfernungsbegriff zwischen Mengen erfüllt wieder die Forderungen 1) bis 3); er erlaubt die Untersuchung einander enthaltender, aber nicht zusammenfallender Mengen. Hingegen erklärt Verf. als symmetrische Entfernung von X und Y : $\bar{X}\bar{Y} = \bar{Y}\bar{X} = \max(XY, YX)$, sie verschwindet natürlich genau dann, wenn $[X] = [Y]$ ist. — Der letzte Abschnitt handelt von Räumen, deren Punkte die Mengen eines gegebenen kompakten Raumes sind; ist dieser ein D_0 -Raum, so bilden die „sphärischen Umgebungen“ $XA < \rho$ zu gegebener Menge A eine Normalfolge, mittels derer in üblicher Weise Häufungspunkte, Konvergenz usw. behandelt werden können.

Harald Geppert (Berlin).